

PERIODICAL ROOM  
GENERAL LIBRARY  
UNIV. OF MICH.

# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,  
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 71 HEFT 7  
DER GANZEN REIHE 376. BANDES 7. HEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, G. QUINCKE, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT EINER TAFEL



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1923 erscheinen Bd. 70, 71 und 72 à 8 Hefte. Preis von Band 71 für Belgien u. Luxemburg Fr. 60.—, Frankreich Fr. 50.—, Dänemark Kr. 18.—; England £ -16-; Finnland Marka 100.—; Holland fl. 10.—; Japan £ -16-; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 20.—, Schweden Kr. 14.—; Schweiz Fr. 20.—, Spanien Pes. 20.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 14. Juni 1923.

## Inhalt.

	Seite
1. Friedrich Kottler. Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. . . . .	457
2. Julia Finkelstein-Cukier. Über die Spitzenentladung. (Hierzu Tafel V.) . . . . .	509

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Beug  
blem  
Dies  
und  
der  
dabe  
stimm  
fläch  
fallen  
niert  
proti  
und  
ordne  
spezi

skala  
erübr  
oder  
die A  
die r  
eines  
schen  
Mein  
well  
wahr

näch

10. S.

An



# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 71.

## 1. *Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen;* von *Friedrich Kottler.*

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> war die Kirchhoffsche Beugungstheorie als *exakte* Lösung eines *wohldefinierten* Problems, nämlich eines „Sprungwertproblems“ erkannt worden. Dieses, und nicht ein Randwertproblem, wie bei Kirchhoff und seinen Nachfolgern, ist es, welches die exakte Fassung der Beugung am *schwarzen Schirm* leistet. Es handelt sich dabei, wie gezeigt wurde, um den *Sprung*, den die zu bestimmende Lichtfunktion an dem beleuchteten Teil der Oberfläche des schwarzen Schirms erleidet, indem dieser das auf fallende Licht aus dem physikalischen Raum in einen supponierten nichtphysikalischen Raum ableitet. In die so interpretierte Kirchhoffsche Theorie ließen sich ganz zwanglos und unter dem analogen Gesichtspunkt auch die Ansätze einordnen, die Sommerfeld und Voigt für schwarze Schirme spezieller Gestalt (Halbebene) gegeben haben.

Alle diese Resultate bezogen sich jedoch nur auf eine *skalare* Lichtfunktion oder auf die bloße *Wellengleichung*. Es erübrigt daher noch ihre Erweiterung für einen *Lichtvektor* oder für die *Maxwellschen Gleichungen*. Es erwächst damit die Aufgabe — und dies ist der Zweck der vorliegenden Arbeit — die neue Auffassung der Beugung am schwarzen Schirm als eines Sprungwertproblems auf die Lösungen der *Maxwellschen Gleichungen* zu übertragen. Damit wird zugleich die Meinung widerlegt, daß der schwarze Schirm mit den *Maxwellschen Gleichungen* unvereinbar wäre, was nur insofern wahr ist, als er durch kein Randwertproblem zu fassen ist.

Der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit bringt zunächst eine ganz allgemeine Lösung der *Maxwellschen Gleichungen*.

1) Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. Ann. d. Phys. 70. S. 405. 1923 (zitirt als A).

chungen, die für die Zwecke der Optik eine ausgezeichnete Rolle spielt und von der die meisten bekannten und bisher verwendeten Ansätze, insbesondere z. B. die Hertz'sche Lösung, spezielle Fälle darstellen. Mit Hilfe dieses Ansatzes wird dann gezeigt, wie die formale Übertragung des Kirchhoffschen Integrals (welches ja nur eine Lösung der *Wellengleichung* darstellt) auf die *elektromagnetischen* Vektoren abzuändern sei, um ein wirkliches Lösungssystem der Maxwell'schen Gleichungen zu ergeben. Die physikalische Begründung dieses so erhaltenen Lösungssystems erfolgt erst im dritten Abschnitt.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den bisherigen Versuchen, die Kirchhoffsche Beugungstheorie auf elektromagnetische Verhältnisse zu erweitern. Hier ist ein Ansatz von Ignatowsky zu erwähnen, der aber auf der unrichtigen Kirchhoffschen Auffassung der Beugung<sup>als</sup> eines Randwertproblems beruht und somit schon darum falsch ist. Überdies stellt dieser Ansatz in Wahrheit gar keine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen dar. Mit diesem Ansätze Ignatowskys identisch erweist sich auch eine von Tedone gegebene Fassung des Huygensschen Prinzips für das elektromagnetische Feld. Die einzige richtige Übertragung des Huygens-Kirchhoffschen Prinzips auf solche Felder ist, allerdings nur für den leeren Raum, von Sir Joseph Larmor angegeben worden. Sie beruht auf einer anschaulichen Betrachtung der fiktiven Belegung, welche nach Huygens auf einer geschlossenen Oberfläche die Wirkung äußerer Lichtpunkte auf das Innere ersetzen kann. Diese Belegung besteht in elektrischen bzw. magnetischen Oberflächenströmen, welche in der Fläche kreisen, wobei Anhäufungen von elektrischen bzw. magnetischen Ladungen zustande kommen dürfen. Solche Ströme sind bekanntlich bestimmt durch Diskontinuitäten (*Sprünge*) in den tangentiellen Komponenten des magnetischen bzw. elektrischen (Innen-) Feldes an der Oberfläche. Und nur diese tangentiellen Diskontinuitäten dürfen, wie Larmor hervorhebt, willkürlich vorgegeben werden, da die Diskontinuitäten in den normalen Feldkomponenten dadurch schon mitbestimmt sind.

Der dritte Abschnitt behandelt auf Grund dieser von Larmor für den leeren Raum angegebenen elektromagnetischen

Fassung des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips die Aufstellung und Lösung des *elektromagnetischen Sprungwertproblems* für den schwarzen Schirm, d. h. die Übertragung der Kirchhoffschen Beugungstheorie auf die elektromagnetische Lichttheorie. Zu den Oberflächenströmen und Oberflächenladungen Larmors treten hier noch die von den Oberflächenströmen erzeugten Linienladungen, welche die ungeschlossene Sprungfläche, d. i. der beleuchtete Teil des schwarzen Schirmes in ihrer Berandungslinie aufweisen muß. Durch diese Linienladungen wird das elektromagnetische Sprungwertproblem gegenüber dem skalaren Sprungwertproblem der ersten Arbeit insofern kompliziert, als die zu bestimmenden Funktionen nicht nur die vorgegebenen Sprungwerte an der Sprungfläche, sondern überdies noch gewisse Unendlichkeiten in der Randlinie der Sprungfläche aufweisen müssen. Im weiteren wird kurz gezeigt, wie auch hier die Sommerfeld-Voigtschen Ansätze in die neue Auffassung einzuordnen seien. Schließlich wird für den Fall einer Kugelwelle, die ein Hertzscher Oszillator emittiert, auf Grund der in der ersten Arbeit gegebenen Umformung des Kirchhoffschen Flächenintegrals in ein Linienintegral auch beim elektromagnetischen Feld gezeigt, wie die gesamte Beugung aus der Randlinie des schwarzen Schirms entspringt.

Der vierte Abschnitt bringt die Anwendung auf den speziellen Fall der schwarzen Halbebene, in welchem das Feld nach Sommerfeld berechnet und mit dem Feld nach Kirchhoff (das natürlich für Schirme *beliebiger* Gestalt bestimmt ist) verglichen werden kann. Außer dem schon in der ersten Arbeit erwähnten bedeutend schärferen Abfall der Amplituden im Schatten bei Kirchhoff im Vergleich zu Sommerfeld weisen beide Felder fast die gleichen Verhältnisse auf. Es wird ferner die Poyntingsche Energieströmung untersucht; im Schatten geht sie, bei größerer Entfernung von der Kante, rein radial von dieser aus und besitzt keine azimutale Komponente, die die Kante umkreisen würde. Demgemäß ist auch die Energieströmung an der Oberfläche des schwarzen Schirms in diesen hineingerichtet, es tritt aus ihm (und zwar sowohl nach Kirchhoff als nach Sommerfeld) keine Strömung in den physikalischen Raum hinaus, wodurch ein Postulat der Schwärze des Schirms erfüllt ist.

## I. Mathematische Einleitung.

## 1. Allgemeine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Die Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum lauten:

$$(I) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0. \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

Hieraus leitet man ab:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathfrak{H} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathfrak{E} = 0,$$

d. h. jede der 6 Feldkomponenten ist eine Lösung der Wellengleichung.

Nimmt man umgekehrt irgendwelche 6 Lösungen der Wellengleichung beliebig an, so bilden sie im allgemeinen kein System von Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen, können also nicht mit den Komponenten des elektromagnetischen Feldes identifiziert werden, da diese nicht voneinander unabhängig sind.

Wir stellen nunmehr die Aufgabe: „Es soll aus irgendwelchen beliebig vorgegebenen Lösungen der Wellengleichung ein Lösungssystem der Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet werden.“ Auf diese Aufgabe wird man bei den Problemen der Optik hingeführt, da wir die Wellengleichung als eine einzige partielle Differentialgleichung mit 1 Unbekannten mathematisch und physikalisch besser beherrschen als das System der 8 partiellen Maxwell'schen Differentialgleichungen mit 6 Unbekannten.

Der Weg zur Lösung dieser Aufgabe ist in einem speziellen Fall von Hertz bei seinem berühmten Oszillator (dem einfachsten Modell einer Lichtquelle) vorgezeichnet worden. Abraham hat den Hertz'schen „Skalar“ zu einem „Hertz'schen Vektor“ verallgemeinert. Wir werden im nachfolgenden sehen, daß auch Abrahams Hertz'scher Vektor nur ein spezieller Fall der allgemeinen Lösung dieser Aufgabe ist. Wir werden nämlich zu einem Vektorenpaar geführt werden, analog dem des elektromagnetischen Feldes, wovon der eine („elektrische“) Vektor mit dem Hertz'schen Vektor, der andere („magnetische“) Vektor mit einem schon von Fitzgerald

für das magnetische Analogon des Hertzschen Oszillators verwendeten Vektor<sup>1)</sup> identisch sind.

Für das Folgende empfiehlt sich der Übergang zu Minkowskis vierdimensionaler Schreibweise der Maxwell'schen Gleichungen, weil hierdurch der mathematische Prozeß sich übersichtlicher und symmetrischer gestaltet. (Mit der speziellen Relativitätstheorie hat dies nur insofern zu tun, als auch diese Theorie eine Folge der Wellengleichung ist.) Wir setzen also:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ct\sqrt{-1},$$

$$F_{23} = -F_{32} = \mathfrak{H}_x, \quad F_{31} = -F_{13} = \mathfrak{H}_y, \quad F_{12} = -F_{21} = \mathfrak{H}_z,$$

$$F_{14} = -F_{41} = -\mathfrak{E}_x\sqrt{-1}, \quad F_{24} = -F_{42} = -\mathfrak{E}_y\sqrt{-1},$$

$$F_{34} = -F_{43} = -\mathfrak{E}_z\sqrt{-1}.$$

Damit wird aus (I), (II):

$$(I') \quad \sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$(II') \quad \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = 0,$$

über alle Kombinationen  $(i k l)$  zu je 3 der 4 Indizes 1, 2, 3, 4. Hieraus folgt wieder

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F_{ki} = \square F_{ki} = 0$$

für alle Kombinationen  $(k l)$  zu je 2 der 4 Indizes 1, 2, 3, 4.

Man integriert nun wie bekannt das System (II') durch den Ansatz:

$$(I) \quad F_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}, \quad (k l)$$

wo  $A_1 A_2 A_3 A_4$  den Vierervektor der Potentiale bedeuten: ( $A_1 A_2 A_3$  Vektorpotential,  $A_4$  skalares Potential mal  $\sqrt{-1}$ ). Wegen (I') erhält man dann, wenn die Nebenbedingung

$$(1a) \quad \sum_{i=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$$

postuliert wird, die 4 Wellengleichungen

$$(2) \quad \square A_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

1) Vgl. H. Bateman, Electrical and optical wave motion etc. Cambridge University Press 1915, § 4.

Somit hätte man die Integration der Maxwell'schen Gleichungen auf die 4 Lösungen  $A_1, A_2, A_3, A_4$  der Wellengleichung zurückgeführt, die jedoch *nicht* beliebig sind, sondern durch die Bedingung (1a) miteinander zusammenhängen.

Daher ist mit der Einführung der 4 Potentiale das gestellte Problem der Zurückführung der Maxwell'schen Gleichungen auf voneinander unabhängige Lösungen der Wellengleichung keineswegs gelöst. Folgendermaßen gelingt es gleichwohl, die Potentiale für den Aufbau der eigentlichen Lösung zu verwerten:

Die Nebenbedingung (1a) wird identisch erfüllt durch folgenden Ansatz:

$$(3) \quad A_i = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_k} \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo  $B_{ik} = -B_{ki}$  die Komponenten eines Sechservektors bedeuten. Wir werden diesen Sechservektor den Hertz'schen *Sechservektor* nennen und werden vorschreiben, daß seine Komponenten sämtlich Lösungen der Wellengleichung sein sollen:

$$(4) \quad \square B_{ik} = 0 \quad \text{für alle Kombinationen } (i, k).$$

Dadurch ist (2) befriedigt und somit der Ansatz (3) für die Integration der Maxwell'schen Gleichungen brauchbar. Die Felder  $F$  drücken sich durch die  $B$  wie folgt aus:

$$(5) \quad F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{p=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_p} B_{kp} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{p=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_p} B_{ip} \quad \text{für alle } (i, k).$$

Hierdurch ist die Integration der Maxwell'schen Gleichungen auf die sechs beliebigen voneinander unabhängigen Lösungen  $B$  der Wellengleichung zurückgeführt.

Wir bemerken hierzu noch: Ebenso wie bei den Potentialen  $A_i$  die Hinzufügung eines Vierervektors  $\partial/\partial x_i \cdot \Phi$  (wo  $\Phi$  ein Skalar, der der Wellengleichung genügt) willkürlich ist, da sich hierdurch der Ausdruck (1) der Felder nicht ändert, ist bei dem Hertz'schen Sechservektor die Hinzufügung eines Sechservektors  $C$  möglich, wo:

$$C_{12} = \frac{\partial}{\partial x_3} D_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} D_3, \quad C_{13} = \frac{\partial}{\partial x_4} D_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} D_4,$$

$$C_{14} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} D_2 \text{ usw.,}$$

und  $D$  ein beliebiger Vierervektor ist, der der Wellengleichung

genügt, ohne daß hierdurch am Ausdruck (3) der Potentiale und daher am Ausdruck (1) der Felder sich etwas ändert.

Wir kehren nunmehr wieder zur reellen dreidimensionalen Schreibweise zurück, indem wir setzen:

$$(6) \quad \begin{cases} B_{23} = \mathfrak{M}_x, & B_{31} = \mathfrak{M}_y, & B_{12} = \mathfrak{M}_z; \\ B_{14} = \mathfrak{N}_x \sqrt{-1}, & B_{24} = \mathfrak{N}_y \sqrt{-1}, & B_{34} = \mathfrak{N}_z \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Die Vektoren  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  stellen das eingangs erwähnte Vektorenpaar dar, und zwar ist  $\mathfrak{N}$  der Hertzsche (elektrische) Vektor Abrahams,  $\mathfrak{M}$  der Fitzgeraldsche magnetische Vektor. Somit drücken sich die Felder gemäß (5) aus durch:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{S} = \text{rot}^2 \mathfrak{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathfrak{N}), \\ \mathfrak{E} = \text{rot}^2 \mathfrak{N} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathfrak{M}). \end{cases}$$

Hierbei ist (für  $\mathfrak{E}$ ) Gebrauch gemacht von der Umformung

$$\text{grad div} \mathfrak{N} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} = \text{rot}^2 \mathfrak{N},$$

und es erfüllen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  die Wellengleichung:

$$(8) \quad \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathfrak{M} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathfrak{N} = 0.$$

Daß  $\mathfrak{N}$  wirklich der Hertzsche Vektor ist, erkennt man durch Vergleich der Formeln (7) (mit  $\mathfrak{M} = 0$ ) mit denen Abrahams.<sup>1)</sup> Wir erinnern daran, daß insbesondere

$$\mathfrak{N} = \frac{n f \left( t - \frac{r_{LP}}{c} \right)}{4\pi r_{LP}}$$

einen elektrischen Dipol im Punkte  $L$  charakterisiert, dessen Achse parallel  $n$ , dessen Moment gleich  $|n|$  ist, wobei

$$r_{LP} = \sqrt{(x_L - x_P)^2 + (y_L - y_P)^2 + (z_L - z_P)^2}$$

den Abstand des Aufpunktes  $P$  vom „Lichtpunkt“  $L$  bedeutet. Der Dipol in  $L$  oszilliert hierbei nach dem Gesetz  $f(t)$  mit der Zeit. Ganz analog bedeutet

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Band, 4. Auflage, Formeln (48c), (48d).



$$\mathfrak{M} = \frac{m f \left( t - \frac{r_{LP}}{c} \right)}{4\pi r_{LP}}$$

einen magnetischen Dipol im Punkte  $L$ , dessen Achse und Moment durch  $m$  gegeben sind und der ebenfalls gemäß  $f(t)$  zeitlich oszilliert.

## 2. Eine Umformung des Integranden im Greenschen Integral.

Wir betrachten das Greensche Integral, welches der Kirchhoffschen Beugungstheorie zugrunde liegt,

$$(9) \quad \int df_Q \left[ \mathfrak{A}_x(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{A}_x(Q) \right],$$

erstreckt über die Punkte  $Q$  einer berandeten Fläche  $f$  (Normale  $n$ ), wobei  $\mathfrak{A}_x$  die  $x$ -Komponente eines Vektors  $\mathfrak{A}$  sein soll, dessen 3 Komponenten jede der Schwingungsgleichung

$$(\Delta + k^2) \mathfrak{A} = 0$$

genügen sollen;  $r_{PQ}$  ist der Abstand des Flächenpunktes  $Q$  vom Aufpunkt  $P$ . Den Integranden in (9) wollen wir einer Umformung unterwerfen, die darauf abzielt, ein Linienintegral über die Berandung der Fläche von ihm abzuspalten.

Wir erinnern zunächst an die Bedeutung des symbolischen Vektors  $\nabla$  als Abkürzung für den Operator grad. Bekanntlich gilt:

$$\text{rot } \mathfrak{A} = [\nabla \mathfrak{A}], \quad \text{div } \mathfrak{A} = (\nabla \mathfrak{A}).$$

Mit Benutzung von  $\nabla$  schreiben wir, indem wir der Normale  $n$  einen Einheitsvektor  $\mathfrak{n}$  zuordnen:

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial w_P}{\partial n} - w_P \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial n} = \mathfrak{A}_x (\mathfrak{n} \nabla w_P) - w_P (\mathfrak{n} \nabla \mathfrak{A}_x),$$

wo

$$w_P = \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}$$

gesetzt ist. Der Operator  $\nabla$  bezieht sich hier auf  $Q$ . Fügen wir die zwei analogen Gleichungen mit  $\mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  hinzu, so bekommen wir:

$$\mathfrak{A} \frac{\partial w_P}{\partial n} - w_P \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial n} = \mathfrak{A} (\mathfrak{n} \nabla w_P) - w_P (\mathfrak{n} \nabla \mathfrak{A}).$$



Unser weiterer Vorgang besteht in einer Umformung von  $w_P(n \nabla) \mathfrak{A}$ . Hierzu beachten wir die Relationen:

$$[[n \nabla] \mathfrak{A}] = \nabla (\tilde{n} \mathfrak{A}) - n (\nabla \mathfrak{A}),$$

$$[n [\nabla \mathfrak{A}]] = \nabla (\tilde{n} \mathfrak{A}) - (n \nabla) \mathfrak{A}.$$

Hierin bedeutet das Zeichen  $\sim$  über  $n$ , daß der Operator  $\nabla$  an  $n$  nicht angreift. Subtraktion ergibt:

$$[[n \nabla] \mathfrak{A}] - [n [\nabla \mathfrak{A}]] = (n \nabla) \mathfrak{A} - n (\nabla \mathfrak{A}).$$

Multiplikation mit  $w_P$  liefert hieraus:

$$[[n \nabla] \mathfrak{A} w_P] + [\mathfrak{A} [n \nabla w_P]] - w_P [n [\nabla \mathfrak{A}]] + w_P n (\nabla \mathfrak{A}) = w_P (n \nabla) \mathfrak{A}.$$

Dies ist die angestrebte Umformung von  $w_P(n \nabla) \mathfrak{A}$ . Dies ergibt:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} (n \nabla w_P) - w_P (n \nabla) \mathfrak{A} &= - [[n \nabla] \mathfrak{A} w_P] + w_P [n [\nabla \mathfrak{A}]] \\ &\quad - w_P n (\nabla \mathfrak{A}) + [[n \mathfrak{A}] \nabla w_P] + (n \mathfrak{A}) \nabla w_P. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die gewünschte Umformung des Integranden in (9), die uns gestatten wird, ein Linienintegral aus (9) abzuspalten.

Man betrachte hierzu die  $x$ -Komponente des Integrals

$$\int df [[n \nabla] \mathfrak{A} w_P],$$

man erhält sie durch Multiplikation mit dem (konstanten) Einheitsvektor  $i$  der  $x$ -Richtung. Man hat

$$\begin{aligned} (i, \int df [[n \nabla] \mathfrak{A} w_P]) &= \int df (i [[n \nabla] \mathfrak{A} w_P]) \\ &= \int df ([n \nabla] [\mathfrak{A} w_P, i]) \\ &= \int df (n [\nabla [\mathfrak{A} w_P, i]]) = (\text{nach dem Stokesschen Satz}) \\ &= \oint (d\mathfrak{s} [\mathfrak{A} w_P, i]) = (i, \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{A}] w_P), \end{aligned}$$

wo  $d\mathfrak{s}$  das gerichtete Randelement von  $f$  ist. Somit

$$(11) \quad \int df [[n \nabla] \mathfrak{A} w_P] = \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{A}] w_P.$$

Wir erhalten somit aus (10) und (11) als Umformung des Greenschen Integrals (9):

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int df \{ \mathfrak{A} (n \nabla w_P) - w_P (n \nabla) \mathfrak{A} \} &= - \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{A}] w_P \\ &+ \int df w_P \{ [n [\nabla \mathfrak{A}]] - n (\nabla \mathfrak{A}) \} \\ &+ [\nabla_P \int df w_P [n \mathfrak{A}]] - \nabla_P \int df w_P (n \mathfrak{A}), \end{aligned} \right.$$

wo von der Vertauschbarkeit von  $P$  und  $Q$  in  $w_P$ , also von  $\nabla = -\nabla_P$  Gebrauch gemacht ist.

### 3. Anwendung auf die elektromagnetischen Feldvektoren.

Das Greensche Integral (9) repräsentiert bekanntlich eine Lösung der Schwingungsgleichung.

Wir denken uns nun, ein elektromagnetisches Feld  $\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0$  vorgegeben; seine Komponenten sind sämtlich Lösungen der Wellengleichung und genügen überdies den Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H}^0 &= i k \mathfrak{E}^0, & \operatorname{rot} \mathfrak{E}^0 &= -i k \mathfrak{H}^0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E}^0 &= 0, & \operatorname{div} \mathfrak{H}^0 &= 0, \end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt ist, daß  $\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0$  von der Zeit wie  $e^{ikt}$  abhängen.

Wir setzen nun in (12) für  $\mathfrak{A}$  einmal  $\mathfrak{E}^0$  und erhalten:

$$(12b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int df \left\{ \mathfrak{E}^0 \frac{\partial w_P}{\partial n} - w_P \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E}^0 \right\} &= - \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{E}^0] w_P \\ &+ \int df w_P [n \operatorname{rot} \mathfrak{E}^0] + \operatorname{rot}_P \int df [n \mathfrak{E}^0] w_P \\ &- \operatorname{grad}_P \int df (n \mathfrak{E}^0) w_P, \end{aligned} \right.$$

da  $\operatorname{div} \mathfrak{E}^0 = 0$ . Wir haben aus den Maxwellschen Gleichungen

$$(12a) \quad \left\{ \begin{aligned} i k \int df (n \mathfrak{E}^0) w_P &= \int df (n \operatorname{rot} \mathfrak{H}^0) w_P \\ &= \int df w_P (n [\nabla \mathfrak{H}^0]) = \int df (n [\nabla \mathfrak{H}^0 w_P]) + \int df (n [\mathfrak{H}^0 \nabla w_P]) \\ &= \oint (d\mathfrak{s} \mathfrak{H}^0) w_P - (\nabla_P \int df w_P [n \mathfrak{H}^0]). \end{aligned} \right.$$

Dies oben eingesetzt, ergibt nach einiger Umformung:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int df \left\{ \mathfrak{E}^0 \frac{\partial w_P}{\partial n} - w_P \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E}^0 \right\} &= - \oint [d\mathfrak{z} \mathfrak{E}^0] w_P \\ &- \text{grad}_P \int c dt \oint \frac{(d\mathfrak{z} \mathfrak{H}^0)}{r_P} + \text{rot}_P^2 \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}^0] \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_P \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{E}^0], \end{aligned} \right.$$

Denn

$$\frac{1}{ik} e^{-ikr_P} F(e^{iket}) = \int c dt F,$$

wo als untere Grenze ein Zeitpunkt zu wählen ist, zu welchem die Funktion  $F$ , die von der Zeit wie  $e^{iket}$  abhängt, verschwindet.  $r_P$  steht in (13) kurz für  $r_{PQ}$ ,  $w_P$  bedeutet wieder

$$\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

Ebenso folgt aus (12), wenn  $\mathfrak{H}^0$  für  $\mathfrak{A}$  eingesetzt wird:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \int df \left\{ \mathfrak{H}^0 \frac{\partial w_P}{\partial n} - w_P \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}^0 \right\} &= - \oint [d\mathfrak{z} \mathfrak{H}^0] w_P \\ &+ \text{grad}_P \int c dt \oint \frac{(d\mathfrak{z} \mathfrak{E}^0)}{r_P} - \text{rot}_P^2 \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{E}^0] \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_P \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}^0]. \end{aligned} \right.$$

#### 4. Ableitung einer Lösung der Maxwellschen Gleichungen aus dem Vorstehenden.

Die 6 Ausdrücke (13) bzw. (14) sollen mit

$$4\pi e^{(1)} \text{ bzw. } 4\pi h^{(1)}$$

bezeichnet werden. Sie sind Lösungen der Schwingungsgleichung, aber keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, wie man folgendermaßen sieht:

Wir schreiben

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi e &= 4\pi \left\{ \text{rot}^2 \mathfrak{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathfrak{M} \right\}, \\ 4\pi h &= 4\pi \left\{ \text{rot}^2 \mathfrak{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathfrak{R} \right\} \end{aligned} \right.$$

mit

$$(15a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N} = + \frac{1}{4\pi} \int c \, dt \int \frac{df}{r_P} [n \, \mathfrak{S}^0], \\ \mathfrak{M} = - \frac{1}{4\pi} \int c \, dt \int \frac{df}{r_P} [n \, \mathfrak{G}^0]. \end{array} \right.$$

Mithin ist  $e, h$  nach (7) ein Lösungssystem der Maxwell'schen Gleichungen, da  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  ersichtlicherweise in den Koordinaten von  $P$  Lösungen der Wellengleichung sind.

Wir schreiben weiter

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi e^{(2)} = - \oint [d\mathfrak{S} \, \mathfrak{G}^0] w_P - \text{grad}_P \int c \, dt \oint \frac{(d\mathfrak{S} \, \mathfrak{S}^0)}{r_P}, \\ 4\pi h^{(2)} = - \oint [d\mathfrak{S} \, \mathfrak{S}^0] w_P + \text{grad}_P \int c \, dt \oint \frac{(d\mathfrak{S} \, \mathfrak{G}^0)}{r_P}. \end{array} \right.$$

$e^{(2)}, h^{(2)}$  sind wohl Lösungen der Wellengleichung, jedoch keine Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen (im Vakuum). Man bestätigt nämlich leicht, daß z. B.

$$\text{rot } e^{(2)} + i k h^{(2)} \neq 0.$$

Infolgedessen bilden auch  $e^{(1)} h^{(1)}$ , da

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{(1)} = e + e^{(2)} \\ h^{(1)} = h + h^{(2)} \end{array} \right.$$

ist, kein Lösungssystem der Maxwell'schen Gleichungen. Man muß daher in  $e^{(1)}$  bzw.  $h^{(1)}$  die Linienintegrale  $e^{(2)}$  bzw.  $h^{(2)}$  weglassen, um auf ein Lösungssystem  $e, h$  der Maxwell'schen Gleichungen zu gelangen.

## II. Die bisherigen Ansätze zur Übertragung des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips auf das elektromagnetische Feld.

### 5. Die Ansätze von Ignatowsky und Tedone.

Wir behandeln im nachfolgenden die bisherigen Versuche, die (unrichtige) Kirchhoffsche Auffassung der von ihm selbst gegebenen Formulierung des Huygensschen Prinzips, welche für eine Lösung der Wellengleichung bestimmt war, auf ein elektromagnetisches Feld, also auf die Maxwell'schen Gleichungen, zu übertragen.

Da ist zunächst ein Versuch von Ignatowsky<sup>1)</sup> zu erwähnen. Wir geben zuerst seine Formel und dann seine der Kirchhoffschen Interpretation nachgebildete Auffassung des Beugungsproblems für den schwarzen Schirm als eines Randproblems. Ignatowsky gibt als Huygenssches Prinzip und zwar als Ausdruck des Feldes im Innern einer geschlossenen Fläche  $f$  mittels eines über diese Fläche erstreckten Oberflächenintegrals, wenn als Medium Äther auftritt:

$$4\pi \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{df}{r} [\nabla r [\mathfrak{n} \mathfrak{E}]]_{t-r/c} - \int df (\mathfrak{E} \mathfrak{n})_{t-r/c} \nabla \frac{1}{r} \\ + \int df \left[ \nabla \frac{1}{r} [\mathfrak{n} \mathfrak{E}] \right]_{t-r/c} + \int \frac{df}{r} \nabla r \left( \mathfrak{n} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right)_{t-r/c} \\ - \int \frac{df}{r} [\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{E}]_{t-r/c}.$$

Hierin ist  $\mathfrak{n}$  die äußere Normale der Fläche,  $r$  der Abstand des Flächenelements  $df$  vom Aufpunkte  $P$ . Analog für  $\mathfrak{H}$ .

Indem wir zur größeren Einfachheit annehmen, daß  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  periodische Funktionen der Zeit wie  $e^{ikct}$  sind und bei  $r$  wieder den Index  $P$  anfügen, erhalten wir nach einiger Umformung:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi \mathfrak{E} &= -\operatorname{rot}_P \int df [\mathfrak{n} \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \operatorname{grad}_P \int df (\mathfrak{E} \mathfrak{n}) \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \\ &\quad - \int df [\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P}. \end{aligned} \right.$$

Vergleich mit (12) ergibt wegen  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ :

$$(18a) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi \mathfrak{E} &= - \int df \left\{ \mathfrak{E} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E} \right\} \\ &\quad - \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P}, \end{aligned} \right.$$

wo das Linienintegral wegfällt, weil  $f$  als geschlossene Fläche angenommen ist.

Die Anwendung, die Ignatowsky von seiner Formel auf das Beugungsproblem macht, ist nun die folgende: Am

1) W. v. Ignatowsky, Diffraction und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwell'schen Gleichungen. Ann. d. Phys. 23. 1907, insbesondere § 1, Formel (1), auch Ann. d. Phys. 25. 1908.

schwarzen Schirm werden bei Kirchhoff lichtseitig die ungestörten Werte des Feldes, schattenseitig die Werte Null als Randwerte eingesetzt. Ignatowsky setzt lichtseitig beliebig vorgeschriebene Randwerte ein und betrachtet Schirme aus beliebigem nichtschwarzen Material, während er schattenseitig die Nullwerte für  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  beibehält. Diese Erweiterung des Kirchhoffschen Ansatzes auf nichtschwarze Schirme ist sicherlich unzulässig; die Kirchhoffsche *Beugungstheorie gilt sicherlich nur für schwarze Schirme*. Infolgedessen haben wir lichtseitig nur die ungestörten Werte  $\mathcal{E}^0$   $\mathcal{H}^0$  anzunehmen an Stelle der Ignatowskyschen Randwerte  $\mathcal{E}$   $\mathcal{H}$ . Überdies aber ist die von Ignatowsky gegebene Formulierung des Huygensschen Prinzips auch bei Beschränkung auf schwarze Schirme unrichtig, wie man aus der Darstellung (18a) erkennt. Denken wir uns nämlich mit Kirchhoff den schwarzen Schirm als geschlossene Oberfläche, deren Lichtwirkung nach außen vermöge des Huygensschen Prinzips berechnet werden soll, so haben wir zunächst in (18a) das Vorzeichen der Normale umzukehren, da die *äußere* Normale aus dem betrachteten Gebiet des Aufpunkts hinaus, somit ins *Innere* des schwarzen Schirms weist. Indem wir nun die Schirmoberfläche  $f$  in eine beleuchtete  $f_1$  und eine beschattete  $f_2$  zerlegen, haben wir im Sinne Kirchhoffs auf der ersteren die Randwerte  $\mathcal{E}^0$   $\mathcal{H}^0$ , auf der letzteren die Randwerte Null. Hierdurch ist eine Unstetigkeit der Randwerte gesetzt, wodurch der Greensche Satz und somit die Herleitung der Formel (18a) hinfällig würde. Sehen wir davon ab, so verbleibt gemäß (18a) für die Lichtwirkung des schwarzen Schirms in  $P$  gemäß dem Ansätze Ignatowskys:

$$(18b) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi \mathcal{E}_P = & + \int df_1 \left( \mathcal{E}^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial \mathcal{E}^0}{\partial n} \right) \\ & + \oint [d\mathfrak{H} \mathcal{E}^0] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P}, \end{aligned} \right.$$

wo diesmal das Linienintegral *nicht* wegfällt, da  $f_1$  keine geschlossene Fläche ist. Man erkennt hieraus, daß der Ignatowskysche Ansatz (18) *nichts anderes ist als eine Umformung der alten Kirchhoffschen Formel*

$$4\pi u_P = \int df_1 \left( u^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial u^0}{\partial n} \right)$$

für eine beliebige Lösung  $u$  der Wellengleichung, jedoch bis auf das Linienintegral in (18b), welches wohl in (18a) (Huygenssches Prinzip für eine geschlossene Fläche), nicht aber in (18b) (Kirchhoffsche Formel für den schwarzen Schirm, ungeschlossene beleuchtete Fläche) wegfällt.

Der Nutzen dieser Umformung (18b) der simplen Kirchhoffschen Formel, welche einfach

$$(18c) \quad 4\pi \mathfrak{E}_P = \int df_1 \left( \mathfrak{E}^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E}^0 \right)$$

ergeben würde, ist nicht einzusehen. Denn (18b) ist ebenso wenig wie (18c) eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen. Denn wir entnehmen leicht aus (13), (14) und (15) bis (17), daß Ignatowskys  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  sich darstellt als

$$\mathfrak{E}_{\text{Ignat.}} = \mathfrak{e} + \mathfrak{e}^{(3)},$$

$$\mathfrak{H}_{\text{Ignat.}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^{(3)},$$

wo

$$4\pi \mathfrak{e}^{(3)} = - \text{grad}_P \int c dt \int \frac{(d\mathfrak{s} \mathfrak{H}^0)}{r_P},$$

$$4\pi \mathfrak{h}^{(3)} = + \text{grad}_P \int c dt \int \frac{(d\mathfrak{s} \mathfrak{E}^0)}{r_P},$$

welches ebensowenig wie  $\mathfrak{e}^{(2)} \mathfrak{h}^{(2)}$  in (16) [entsprechend dem Ansatz (18c), d. h.  $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}^{(1)}$ , vgl. (17)] ein Lösungssystem der Maxwellschen Gleichungen darstellt, da z. B.

$$\text{rot } \mathfrak{e}^{(3)} + ik \mathfrak{h}^{(3)} \neq 0.$$

Hätten wir es freilich mit dem ursprünglichen Huygensschen Prinzip (18a) zu tun, so würden die Linienintegrale  $\mathfrak{e}^{(3)}$ ,  $\mathfrak{h}^{(3)}$  über die geschlossene Fläche wegfallen, und die Umformung Ignatowskys ergäbe tatsächlich ein Lösungssystem der Maxwellschen Gleichungen. Bei dem Kirchhoffschen Beugungsproblem (ungeschlossene Fläche) aber fallen sie nicht weg, wofür wir später ein numerisches Beispiel sehen werden [vgl. Nr. 9, Formel (25)].

Demgemäß leiden die Ansätze Ignatowskys an folgenden Fehlern: Sie gehen über die bloß für schwarze Schirme gültigen Kirchhoffschen Ansätze in unzulässiger Weise hinaus; bei Beschränkung auf schwarze Schirme unterliegen

sie natürlich den gleichen Bedenken wie die Kirchhoffschen für eine skalare Lösung der Wellengleichung, von denen sie überdies bloß eine kaum vorteilhafte Umformung [vgl. (18c) und (18b)] darstellen. Sie befriedigen endlich keineswegs die Maxwellschen Gleichungen.

Ganz die gleiche Formel wie (18) hat auch später O. Tedone<sup>1)</sup> gegeben. Seine Formel (5) a. a. O. spezialisiert für Äther ( $\epsilon = \mu = 1$ ) lautet:

$$4\pi \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{df}{r} [n \mathfrak{H}]_{t-r/c} + \text{rot} \int \frac{df}{r} [n \mathfrak{E}]_{t-r/c} \\ - \text{grad div} \int \frac{dV}{r} \mathfrak{E}_{t-r/c}.$$

Dabei ist  $f$  eine geschlossene Fläche,  $V$  das eingeschlossene Volumen,  $r$  der Abstand des Integrationselements von einem inneren Aufpunkt  $P$ ,  $n$  die ins Innere des Gebiets gezogene Normale. Man erhält hieraus

$$4\pi \mathfrak{E}_P = \text{rot} \int df [n \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \text{rot}_P^2 \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}] \\ - \text{grad}_P \left\{ \int df (\mathfrak{E} n) \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \int c dt \text{div}_P \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}] \right\},$$

wobei  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H} \sim e^{ikt}$  angenommen und  $r_P$  für  $r$  geschrieben ist. Nach (12a) wird hieraus

$$4\pi \mathfrak{E}_P = \text{rot}_P \int df [n \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \text{rot}_P^2 \int c dt \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}] \\ - \text{grad}_P \int c dt \oint (d\mathfrak{s} \mathfrak{H}),$$

welches nach (13) identisch ist mit

$$4\pi \mathfrak{E}_P = \int df \left\{ \mathfrak{E} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E} \right\} + \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{E}] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P},$$

somit vom Vorzeichen abgesehen, identisch mit dem Ignatowskyschen Ansatz (18b).

1) O. Tedone, Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico Linc. Rend. (5), 26. 1. Sem. 286. 1917.



Tedone geht auch weiterhin ganz analog wie Ignatowsky vor, indem er diese Formel auf die Probleme der Beugung, und zwar nicht nur der Beugung an schwarzen Schirmen, nach der Methode der Randwertprobleme anwendet. Sein Ansatz leidet daher an den gleichen Fehlern wie der Ignatowskysche.

## 6. Die Lösung von Larmor.

Die Ansätze von Ignatowsky und Tedone sind also darum keine richtige Übertragung des Huygensschen Prinzips auf ein elektromagnetisches Feld, weil sie keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen darstellen. Der Ansatz (18b) ist daher ebensowenig wie (13) die richtige Formulierung des Huygensschen Prinzips.

Der Grund dieses Versagens liegt darin, daß diese Ansätze von der Wellengleichung herübergenommen sind und daher (wenigstens für ungeschlossene Flächen) noch keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen darstellen; denn irgendwelche 6 Lösungen der Wellengleichung stellen, obwohl die sechs elektromagnetischen Feldkomponenten solche Lösungen sind, kein elektromagnetisches Feld dar, da diese 6 Komponenten nicht voneinander unabhängige Lösungen der Wellengleichung sind.

Diese gegenseitige Abhängigkeit der 6 Feldkomponenten und daher die Unmöglichkeit, die 6 Randwerte im Huygensschen Prinzip unabhängig voneinander vorzugeben, hat Sir J. Larmor<sup>1)</sup> erkannt und er hat demgemäß die richtige Formulierung des Huygensschen Prinzips für ein elektromagnetisches Feld angegeben.

Wir wollen seine Entwicklungen hier in Kürze wiedergeben. Es sei also die Aufgabe gestellt, die Wirkung von *außerhalb* einer geschlossenen Fläche befindlichen Lichtquellen auf das *Innere* dieser Fläche durch eine geeignete Flächenbelegung mit einfachen und doppelten Lichtpunkten, also den fingierten Lichtquellen Huygens' zu ersetzen. Infolge dieser flächenhaft verteilten Quellen muß das elektromagnetische Feld, das diese Belegung im Innern der Fläche darstellt, beim

1) Sir J. Larmor, On the mathematical expression of the principle of Huygens, Lond. Mathem. Society Proceed. (2), 1. 1903. S. 1ff., insbesondere § 5.

Durchgang durch die Fläche Diskontinuitäten besitzen. (Bekanntlich stellt die Formel des Huygensschen Prinzips in diesem Fall das Feld nur für das *Innere* dar, während sie für einen außerhalb der Fläche gelegenen Aufpunkt *Null* liefert, also außen nicht etwa mit dem Feld der Lichtquellen koinzidiert, wie innen.) Die gesuchte Huygenssche Flächenbelegung ist also bekannt, sobald die Diskontinuitäten des Innenfeldes an der Oberfläche bekannt sind. Es ist nun unmöglich für alle 6 Feldkomponenten die Diskontinuitäten an der Oberfläche willkürlich vorzuschreiben. „Denn“, sagt Larmor, „eine Diskontinuität an einer Oberfläche ist völlig ausgedrückt durch die Beträge der Sprünge in den *tangentiellen* Komponenten von elektrischer und magnetischer Feldstärke; die *normalen* Komponenten dieser Feldstärken beiderseits der Fläche werden nämlich aus den tangentiellen direkt abgeleitet mittelst der fundamentalen Wirbelrelationen von Ampère<sup>1)</sup> und Faraday<sup>2)</sup>, und daher ist eine ganz bestimmte Diskontinuität in ihnen schon involviert<sup>3)</sup>, die also bloß durch die innere Konstitution des Äthers gefordert wird, welches auch immer die in der Fläche verteilten Quellen seien.“ Infolgedessen ist es nur möglich, für die vier tangentiellen Feldkomponenten die Diskontinuitäten willkürlich vorzuschreiben, die der zwei normalen Komponenten sind hierdurch schon bestimmt. Der Fehler in den Ansätzen (13) bzw. (18b) von Ignatowsky und Tedone liegt also darin, daß dort alle 6 Diskontinuitäten willkürlich vorgegeben sind.

Den richtigen mathematischen Ausdruck des Huygensschen Prinzips für ein elektromagnetisches Feld findet man nun nach Larmor durch folgende mehr *physikalische* Betrachtung: Vorgegeben die vier tangentiellen Diskontinuitäten; eine Diskontinuität der tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft an den beiden ( $\pm$ ) Seiten einer Fläche

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+_{\text{tang}} - \mathfrak{H}^-_{\text{tang}}$$

hat bekanntlich einen elektrischen Flächenstrom von der Dichte per Längeneinheit des Querschnitts

$$\frac{\mathfrak{J}}{e} = [n \mathfrak{H}]$$

1) Die drei ersten Gleichungen von (I).

2) Die drei ersten Gleichungen von (II).

3) Durch die Diskontinuitäten in den tangentiellen Feldstärken.

zur Folge. (Beiderseits statische Einheiten, jedoch mit Unterdrückung des  $4\pi$ -Faktors nach dem von Lorentz<sup>1)</sup> eingeführten Maßsystem.) Dieser Strom wird im allgemeinen (zeitlich variierende) Ladungsanhäufungen entlang seinen Strömungslinien zur Folge haben; eben diese Ladungsanhäufungen sind es, welche eine (zeitlich variierende) Ladung der Oberfläche, somit die Diskontinuität der normalen Komponente der elektrischen Kraft als Konsequenz der Diskontinuitäten der tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft bedingen.

Da diese Ladungsanhäufungen zeitlich variieren, hat man also gewissermaßen in jedem Flächenelement  $df$  einen *elektrischen Oszillator*. Seine Achse zeigt parallel der Strömungslinie  $\mathfrak{S}$ , die in dem Flächenelement liegt. Sei  $l$  die Länge des bezüglichen Stromfadens,  $b$  sein Querschnitt, wo  $l \cdot b = df$ , so hat man für die  $\pm$ -Ladung an den beiden Enden des Querschnitts

$$b \cdot \int dt |\mathfrak{S}|,$$

wo als untere Grenze der Zeitpunkt des Verschwindens von  $\mathfrak{H}$  einzusetzen ist; somit folgt für das elektrische Moment dieses Oszillators

$$l \cdot b \cdot \int dt \mathfrak{S} = df \int c dt [n \mathfrak{H}]$$

nach Größe und Richtung. Hieraus ergibt sich als Beitrag des Elements  $df$  zum Hertzschen Vektor  $\mathfrak{N}$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{df}{r_P} \int_{t-r_P/c}^{t-r_P/c} c dt [n \mathfrak{H}],$$

somit als Gesamtbeitrag der ganzen Fläche

$$(19a) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} \int_{t-r_P/c}^{t-r_P/c} c dt [n \mathfrak{H}].$$

(Der Faktor  $1/4\pi$  rührt wieder vom Lorentzschen Maßsystem her.)

Ganz analog folgt aus der Diskontinuität der tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke

1) H. A. Lorentz, Encyklop. der mathem. Wiss. V, 13.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+_{\text{tang}} - \mathcal{E}^-_{\text{tang}}$$

ein „magnetischer Strom“

$$\frac{\mathcal{R}}{c} = -[n\mathcal{E}].$$

Dieser Strom häuft magnetische „Ladungen“ in jedem Flächenelement an, welche eine magnetische Ladung der Oberfläche und somit eine Diskontinuität der normalen Komponente der magnetischen Feldstärke als Konsequenz der Diskontinuität der tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke bedingen. Das magnetische Moment des Flächenelements  $df$  ergibt sich zu

$$l \cdot b \int dt \mathcal{R} = -df \int c dt [n\mathcal{E}]$$

Beitrag des  $df$  zum Fitzgeraldschen Vektor  $\mathcal{M}$

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{df}{r_P} \int_{t-r_P/c}^t c dt [n\mathcal{E}],$$

Gesamtbeitrag der ganzen Fläche:

$$(19b) \quad \mathcal{M} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} \int_{t-r_P/c}^t c dt [n\mathcal{E}].$$

Aus  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{R}$  rechnet sich dann das Innenfeld nach der Vorschrift (15):

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_P = \text{rot}_P \mathcal{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_P \mathcal{M}, \\ \mathcal{H}_P = \text{rot}_P \mathcal{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_P \mathcal{R}. \end{cases}$$

Bei Anwendung auf das Huygenssche Prinzip hat man  $\mathcal{E} = \mathcal{H} = 0$  für einen außerhalb der Fläche  $f$  liegenden Aufpunkt  $P$ ; somit ist auch  $\mathcal{E}^+ = \mathcal{H}^+ = 0$ , wenn wir die Normale  $n$  nach außen orientieren. Hingegen wird  $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^0$ ,  $\mathcal{H}^- = \mathcal{H}^0$ , wenn  $\mathcal{E}^0$ ,  $\mathcal{H}^0$  das Feld der Lichtquellen ist, welches ja innerhalb der Fläche durch (20) richtig wiedergegeben werden soll. Hieraus

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}^0, \quad \mathcal{H} = -\mathcal{H}^0$$

und wir haben die Formeln (15), (15a) wiedergefunden, bloß mit verändertem Vorzeichen, da jetzt die Normale  $n$  aus dem betrachteten Gebiet hinausweist.

Larmor gibt a. a. O. (vgl. die Note vom 14. 2. 1908 auf S. 11) ohne Ableitung eine Form des Huygensschen Prinzips, die sich mit der vorstehend abgeleiteten deckt. Z. B. wenn die magnetische tangentielle Feldstärke im Element  $df$  einen Sprung erleidet, der wie  $4\pi f(t)$  nach der Zeit variiert, so fließt in der Fläche ein elektrischer Strom vom Betrag  $f(t)$  senkrecht zu der Richtung dieses Sprunges. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Feld vom Betrag

$$-\sin(r_P \delta s) \frac{d}{dr_P} \left\{ \frac{1}{r_P} f \left( t - \frac{r_P}{c} \right) \right\} df$$

entlang Kreisen, die um das Stromelement  $\delta s$  und in Ebenen senkrecht zu  $\delta s$  gezogen sind. Unsere Formeln (19a), (20) liefern:

$$|\mathfrak{H}| = -4\pi f(t), \quad \mathfrak{E} = 0,$$

$$\mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \frac{df}{dr_P} \int_{t-r_P/c}^{t-r_P/c} c dt [n \mathfrak{H}],$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_P \mathfrak{N} = + \frac{1}{4\pi} df \left[ \nabla_P \left( -4\pi \frac{f(t-r_P/c)}{r_P} \right), \left[ \frac{n \mathfrak{H}}{|\mathfrak{H}|} \right] \right] \\ &= -df \frac{d}{dr_P} \left( \frac{f(t-r_P/c)}{r_P} \right), \quad \left[ \frac{r_P}{r_P} \frac{\mathfrak{S}}{|\mathfrak{S}|} \right], \end{aligned}$$

somit als Betrag von  $\mathfrak{S}$ :

$$-df \frac{d}{dr_P} \left\{ \frac{f(t-r_P/c)}{r_P} \right\} \sin(r_P \delta s),$$

als Richtung dieselbe wie oben, daher beides in Übereinstimmung mit Larmor.

Somit gibt (19a), (19b) zusammen mit (20) die richtige Formulierung des Huygensschen Prinzips für einen innerhalb der Fläche  $f$  gelegenen Aufpunkt  $P$ , wobei  $n$  die äußere Normale der Fläche und  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  die negativ genommenen Werte des Feldes an der Innenseite der Fläche sind.

### III. Das elektromagnetische Sprungwertproblem und die Übertragung der Kirchhoffschen Beugungstheorie.

Wir haben im vorstehenden Ansatz von Larmor (19a), (19b) und (20) das Mittel in der Hand die richtige Übertragung der Kirchhoffschen Beugungstheorie für den schwarzen

Schirm von der skalaren Wellentheorie auf die elektromagnetische Lichttheorie durchzuführen.

In der ersten Arbeit (A., Abschnitt I) hatten wir erkannt, daß die richtige Auffassung der Kirchhoffschen Formel nicht auf ein Randwertproblem (das für den schwarzen Schirm unmöglich ist), sondern auf ein Sprungwertproblem führt, D. h. an der beleuchteten Seite des Schirms springen die Werte der (skalaren) Lichtfunktion um den Wert der ursprünglichen ungestörten Funktion, entsprechend der Natur des schwarzen Schirms, welcher das auffallende Licht restlos aus dem physikalischen Raum ableiten soll. Nur das Licht, welches auf die Berandung der beleuchteten Schirmfläche auffällt, geht nicht restlos verloren, indem es die an der Berandung entspringende Beugungswelle erregt. Da die Berandung als Verzweigungslinie im Sinne Riemanns sowohl dem physikalischen als dem nichtphysikalischen Raum angehört, ist es klar, daß die Beugungswelle auch in Teile des Schattens hineinwirkt, welche eigentlich die Berandung nicht „sehen“ könnten, da die direkte Linie zu dieser hin im physikalischen Raum durch zwischenliegende Teile des schwarzen Schirms verdeckt wäre. Die Funktion des Schirms, der aus „Äther“ besteht, ist eben nicht die der *Undurchsichtigkeit*, sondern der *Kommunikation mit einem anderen Raum*. Er läßt dafür die aus dem nichtphysikalischen Raum kommende Beugungswelle ebenso wieder in den physikalischen Raum hinaus. Dies ist kein Widerspruch gegen die Schwärze, da nur zu verlangen ist, daß von dem *auffallenden* Licht nichts in den physikalischen Raum zurückkehrt, daß also keine Zirkulation von Energieströmung rund um die Verzweigungslinie stattfindet. Die Untersuchung dieser Frage hatten wir in A. eigens auf die elektromagnetische Theorie vertagt. Sie wird am Schlusse dieser Arbeit erörtert werden (Nr. 11).

Zunächst gehen wir also daran, das skizzierte Sprungwertproblem von der Kirchhoffschen (Skalar)-Theorie auf die elektromagnetische Theorie (Sechservektor Minkowskis) zu übertragen.

## 7. Das elektromagnetische Sprungwertproblem.

Es liegt nahe, wie in A. (Nr. 18) Lösungen der Wellengleichung zu suchen, und zwar hier 6 an Zahl, die nur in

einem Lichtpunkt  $L$  einen Pol haben (analog den 6 Komponenten des Feldes eines Hertzschen Oszillators als dem einfachsten Modell einer Lichtquelle), die ferner an der berandeten Fläche  $f_1$  (der beleuchteten Fläche des schwarzen Schirms) die bez. Sprungwerte<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^0 & \text{bzw.} & & \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}^0, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} &= \frac{\partial \mathfrak{E}^0}{\partial n} & \text{bzw.} & & \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial n} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial n} \end{aligned}$$

aufweisen [hier bedeutet  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}$  keine Ableitung von  $\mathfrak{E}$  nach der Normalen, sondern nur ein Symbol für den Sprung der normalen Derivierten des Feldes, also  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_-$ ] und die schließlich das gewisse Integral über eine unendlich ferne Fläche zum Verschwinden bringen.

Die Lösung, zu der man auf diese Weise geführt wird, wäre:

$$4\pi \mathfrak{E}_P = 4\pi \mathfrak{E}_P^0 + \int df \left\{ \mathfrak{E}^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{\partial \mathfrak{E}^0}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \right\},$$

$$4\pi \mathfrak{H}_P = 4\pi \mathfrak{H}_P^0 + \int df \left\{ \mathfrak{H}^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \right\},$$

somit [vgl. (13), (14) und Nr. 4]

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + e^{(1)}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 + h^{(1)}.$$

Wir wissen bereits, daß  $e^{(1)} h^{(1)}$  keine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen sind. Somit versagt dieser Analogieschluß, d. i. die bloße Übertragung der Kirchhoff-Greenschen Methode, weil ja diese letztere auch bloß auf die Wellengleichung zugeschnitten ist und die 6 Feldkomponenten keine sechs unabhängigen Lösungen der Wellengleichung darstellen.

Wir müssen daher einen anderen Weg einschlagen, um ein Sprungwertproblem analog dem Kirchhoffschen für das elektromagnetische Feld zu formulieren. Dazu bieten die Ansätze Larmors (19a), (19b) und (20) die Handhabe; obwohl sie von Larmor ursprünglich nur für eine geschlossene im materielle fingierte Diskontinuitätsfläche im Äther entsprechend dem Grundgedanken des Huygensschen Prinzips aufgestellt

1)  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^+ - \mathfrak{E}^-$ ,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ - \mathfrak{H}^-$ .



wurden, können wir sie hier für eine reale ungeschlossene Diskontinuitätsfläche  $f_2$  ohne weiteres übernehmen. *Danach ist es also nur möglich, die 4 Diskontinuitäten in den tangentiellen Feldkomponenten willkürlich vorzuschreiben, die restlichen zwei in den normalen Feldkomponenten sind hierdurch schon bestimmt.* Dementsprechend formulieren wir das elektromagnetische Sprungwertproblem wie folgt:

Gesucht ein Feld  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ , welches

1. die Maxwell'schen Gleichungen (I), (II) befriedigt;
2. in dem Lichtpunkt  $L$  wie das Feld des Hertz'schen Oszillators

$$\left[ \text{d. i. } \mathfrak{H}_{\text{Hertz}} = \mathfrak{H}^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{E}_{\text{Hertz}} = \mathfrak{E}^0 = \text{rot}^2 \mathfrak{N} \text{ mit} \right.$$

$$\mathfrak{N} = \frac{n}{4\pi r_L} f\left(t - \frac{r_L}{c}\right) \text{ für } r_L = 0 \Big]$$

unendlich wird;

3. an der Fläche  $f_1$  die folgenden Sprungwerte in den tangentiellen Komponenten aufweist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^+_{\text{tang}} - \mathfrak{E}^-_{\text{tang}} = \mathfrak{E}^0_{\text{tang}}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+_{\text{tang}} - \mathfrak{H}^-_{\text{tang}} = \mathfrak{H}^0_{\text{tang}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} = \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_{\text{tang}}}{\partial n} \right)^+ - \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_{\text{tang}}}{\partial n} \right)^- = \frac{\partial \mathfrak{E}^0_{\text{tang}}}{\partial n},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial n} = \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_{\text{tang}}}{\partial n} \right)^+ - \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_{\text{tang}}}{\partial n} \right)^- = \frac{\partial \mathfrak{H}^0_{\text{tang}}}{\partial n};$$

4. die gewissen Greenschen Integrale im Unendlichen zum Verschwinden bringt.

Man beachte, daß unter den Bedingungen 1—4 die Bedingung fehlt, daß die Felder überall außer in  $L$  bzw. an  $f_1$  regulär sein sollen. Es wird sich zeigen, daß wir in der Randlinie von  $f_1$  ein Unendlichwerden der Felder zulassen müssen. Infolgedessen genügen diese Bedingungen *nicht* zur eindeutigen Festlegung des gesuchten Feldes.

Indem wir die Argumentation der Nr. 6 wieder aufnehmen, werden wir als Folge der Diskontinuitäten der tangentiellen Feldkomponenten  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{E}$ , einen elektrischen bzw. magnetischen Flächenstrom von der Querschnittsdichte

$$\frac{\mathfrak{J}}{c} = [n \mathfrak{H}] = [n \mathfrak{H}^0] \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathfrak{K}}{c} = -[n \mathfrak{E}] = -[n \mathfrak{E}^0]$$



haben. Diese Ströme haben eine Aufladung der Oberfläche zur Folge mit den Flächendichten:

$$\sigma = (n \mathfrak{E}^0) \quad \text{bzw.} \quad \tau = (n \mathfrak{H}^0),$$

wobei  $(n \mathfrak{E}^0)$  bzw.  $(n \mathfrak{H}^0)$  die aus den Diskontinuitäten der tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{E}$  folgenden Diskontinuitäten der normalen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  sind. Es ist leicht zu zeigen, daß diese die angeschriebenen Werte haben. Angenommen nämlich, wir hätten an der Stelle  $Q$  von  $f_1$  die Normale  $n$  parallel zur  $z$ -Achse, und wir wollten aus den vorgegebenen Diskontinuitäten der tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{H}$ , d. i.  $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y$ , die Diskontinuität der normalen Komponente von  $\mathfrak{E}$ , d. i.  $\mathfrak{E}_z$ , bestimmen. Dann haben wir die Differentialgleichung zu benutzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E}_z.$$

Diese gilt beiderseits der Fläche, also:

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} \right)^+ - \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right)^+ = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E}_z \right)^+$$

und analog für die — Seite. Wir können aber hierfür auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{H}_y^+) - \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{H}_x^+) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E}_z^+),$$

da ja die Funktionen  $\mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{E}_z$  nur nach  $z$  unstetig sein sollen. Subtrahiert man hiervon die auf die negative Seite bezügliche Gleichung und bedeckt

$$\mathfrak{H}_y^+ - \mathfrak{H}_y^- = \mathfrak{H}_y^0, \quad \mathfrak{H}_x^+ - \mathfrak{H}_x^- = \mathfrak{H}_x^0,$$

so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{H}_y^0 - \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{H}_x^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E}_z^+ - \mathfrak{E}_z^-).$$

Andererseits ist die linke Seite der letztangeschriebenen Gleichung gleich

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial t},$$

weil ja das ungestörte Feld  $\mathfrak{E}^0$  den Maxwellschen Gleichungen genügt. Hieraus folgt

$$\mathfrak{E}_z^+ - \mathfrak{E}_z^- = \mathfrak{E}_z^0,$$

was zu beweisen war.

Außer mit der *Flächenaufladung* haben wir schließlich noch mit einer Aufladung der Randlinie  $s$  der  $f_1$  zu rechnen; also mit einer *Linien-dichte*. Auch diese ist völlig durch die Flächenströme  $\mathfrak{J}$  bzw.  $\mathfrak{R}$ , d. i. durch die tangentiellen Diskontinuitäten bestimmt. Diese Aufladungen der Randlinie kommen zustande dadurch, daß Strömungslinien von  $\mathfrak{J}$  bzw.  $\mathfrak{R}$  auf dem Rande beginnen oder endigen. Angenommen, wir hätten an einer Stelle  $Q$  der Randlinie  $s$  die Normale  $n$  des anstoßenden Flächenelements parallel zur  $z$ -Achse, das Linien-element  $d\bar{s}$  parallel zur  $x$ -Achse, so kommt von den 2 Komponenten des elektrischen Flächenstromes

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_x &= c[n\mathfrak{H}^0]_x = -c\mathfrak{H}_y^0, \\ \mathfrak{J}_y &= c[n\mathfrak{H}^0]_y = +c\mathfrak{H}_x^0\end{aligned}$$

nur die zweite für eine Aufladung des Elementes  $|d\bar{s}| = dx$  in Betracht. Die bezügliche Aufladung  $\Sigma$  beträgt zur Zeit  $t^1$ )

$$dx \cdot \Sigma = - \int dt \mathfrak{J}_y dx = - \int c dt \mathfrak{H}_x^0 dx = - \int c dt (\mathfrak{H}^0 d\bar{s}),$$

wobei als untere Grenze ein geeigneter Zeitpunkt einzusetzen ist. Ebenso kommt für die magnetische Aufladung  $\Theta$

$$dx \cdot \Theta = - \int dt \mathfrak{R}_y dx = + \int c dt \mathfrak{E}_x^0 dx = + \int c dt (\mathfrak{E}^0 d\bar{s}).$$

Wir haben somit als Folge der bloßen Diskontinuitäten der tangentiellen Feldkomponenten:

elektrischen Flächenstrom (Dichte  $\mathfrak{J}$ ), elektrische Flächenladung (Dichte  $\sigma$ ), elektrische Linienladung (Dichte  $\Sigma$ ) bzw. magnetischen Flächenstrom (Dichte  $\mathfrak{R}$ ), magnetische Flächenladung (Dichte  $\tau$ ), magnetische Linienladung (Dichte  $\Theta$ ).

Die Berechnung des Feldes der elektrischen Ströme und Ladungen ist bekannt. Man setze  $e'$ ,  $h'$  für deren Feld und berechne sie mit Hilfe eines Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  und eines skalaren Potentials  $\Phi$ . Man hat bekanntlich:

$$e' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi, \quad h' = \text{rot } \mathfrak{A}$$

1) Man beachte, daß eine positive Aufladung des Elementes  $dx$  von der  $(-\mathfrak{J}_y)$ -Komponente hervorgerufen wird.

und <sup>1)</sup>

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \int \frac{df}{r_P} (\mathfrak{Z})_{t-r_P/c};$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} (\sigma)_{t-r_P/c} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r_P} (\Sigma)_{t-r_P/c}.$$

Die Berechnung des Feldes  $e''$   $h''$  der *magnetischen Ströme und Ladungen* vollzieht sich analog. Man führe ein: das Vektorpotential  $\mathfrak{B}$  und das skalare Potential  $\Psi$  und setze<sup>2)</sup>:

$$e'' = -\text{rot } \mathfrak{B}, \quad h'' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} - \text{grad } \Psi$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{df}{r_P} (\mathfrak{R})_{t-r_P/c}, \quad \Psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} (\tau)_{t-r_P/c} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r_P} (\Theta)_{t-r_P/c}.$$

Fassen wir zusammen:

$$e = e' + e'', \quad h = h' + h'',$$

so kommen wir genau zu den Formeln (15), (15a), also zu derselben Lösung wie Larmor für die geschlossene immaterielle

1) Man beachte, daß  $\mathfrak{A}$ ,  $\Phi$  nicht nur Lösungen der Wellengleichung sind, sondern daß wegen (12a) auch die Nebenbedingung (1a), d. i.  $\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$  erfüllt ist.

2) Vierdimensional hat man, wenn  $h_z' = F'_{23}, \dots - e_z' \sqrt{-1} = F'_{14}, \mathfrak{A}_x = A_1 \dots \Phi \sqrt{-1} = A_4$  gesetzt werden

$$F'_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k},$$

wodurch (II') in Nr. 1 identisch, (I') dadurch befriedigt werden, daß  $\square A_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$  mit der Nebenbedingung  $\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$ .

Analog, wenn  $h_z'' = F''_{23} = F''_{14}^*, \dots - e_z'' \sqrt{-1} = F''_{14} = F''_{23}^*, \mathfrak{B}_x \sqrt{-1} = B_1 \dots - \Psi = B_4$  bedeuten:

$$F''_{ik}^* = \frac{\partial B_k}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_k},$$

wodurch (I') in Nr. 1 identisch, (II') dadurch befriedigt werden, daß  $\square B_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$  mit der Nebenbedingung  $\sum_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0$ .

Diskontinuitätsfläche [vgl. (19a), (19b), (20)]. Dies sieht man z. B. für

$$(21a) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi - \text{rot } \mathfrak{B} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{H}^0]_{t-r_P/c} \\ &\quad - \text{grad}_P \left\{ \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} (n \mathfrak{E}^0)_{t-r_P/c} - \frac{1}{4\pi} \oint \int c dt \frac{(\mathfrak{H}^0 d\mathfrak{s})}{r_P} \right\} \\ &\quad + \text{rot}_P \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} [n \mathfrak{E}^0]_{t-r_P/c}. \end{aligned} \right.$$

Vergleich dieser Formel mit (12b) in Nr. 3 ergibt, wenn  $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0 \sim e^{ikct}$  sind:

$$(21b) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\epsilon &= \int df \left\{ \mathfrak{E}^0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{\partial \mathfrak{E}^0}{\partial n} \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \right\} \\ &\quad + \oint [d\mathfrak{s} \mathfrak{E}^0] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \text{grad}_P \oint \int (d\mathfrak{s} \mathfrak{H}^0) \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} c dt. \end{aligned} \right.$$

Somit gemäß (13):

$$(21c) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\epsilon &= 4\pi \left\{ \text{rot}^2 \mathfrak{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{R} \right\}, \\ \text{wo} \\ \mathfrak{R} &= + \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} \int c dt [n \mathfrak{H}^0], \\ \mathfrak{R} &= - \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{r_P} \int c dt [n \mathfrak{E}^0]. \end{aligned} \right.$$

Vergleichung mit (15a) liefert sodann den Beweis für die obige Behauptung.

Die Formel (21a) ist vorstehend zwangsläufig aus der Vorgabe der willkürlich vorgebbaren tangentiellen Diskontinuitäten abgeleitet worden. Zieht man die Form (21b) in Betracht, so sieht man, daß das Feld  $\epsilon, \mathfrak{h}$ , außer den Diskontinuitäten  $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0$  bzw.  $\partial \mathfrak{E}^0 / \partial n, \partial \mathfrak{H}^0 / \partial n$  an  $f_1$  noch *Singularitäten* besitzt, indem es in der Berandung des Schirms unendlich wird. Dies Unendlichwerden ist eine Folge des Umstandes, daß die Potentiale<sup>1)</sup> einer einfachen bzw. einer doppelten Flächenbelegung, die in (21b) auftreten, in der Berandung der Fläche

1) Man setze für den Moment  $k = 0$ .

unendlich werdende Derivierte aufweisen. Und da mit Hilfe solcher Flächenpotentiale in (21 b) die Feldkomponenten zum Teil dargestellt sind, so ist klar, daß die Feldkomponenten in der Berandung unendlich werden müssen, da ja durch die Maxwellschen Gleichungen beispielsweise in

$$-ik\eta_z = \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial x}$$

jede Feldkomponente durch die räumlichen Differentialquotienten zweier anderen dargestellt wird, welche Differentialquotienten in der Berandung, wie erwähnt, unendlich werden. Die hieraus resultierenden Glieder sind die Linienintegrale in (21 b). Infolgedessen waren auch die durch die bloßen Flächenintegrale in (21 b) gegebenen Ausdrücke  $e^{(1)}$  bzw.  $\eta^{(1)}$  in (13) bzw. (14) keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen.

Es würde hier noch erübrigen, dieses Unendlichwerden der Derivierten der Flächenpotentiale in der Berandungslinie der Fläche anzugeben und nachzuweisen, daß die in (21 b) auftretenden Unendlichkeiten, d. h. die beiden Linienintegrale genau mit den durch die Differentiationen des Flächenintegrals in (21 b) infolge der Maxwellschen Gleichungen auftretenden Unendlichkeiten übereinstimmen und nicht irgendwelche andere Unendlichkeiten willkürlich einführen. Wir übergehen hier diese Aufgabe, die uns zu weit führen würde, zumal das Verhalten der ersten und zweiten Derivierten des Flächenpotentials in einem Punkt der Berandung in der Literatur noch wenig studiert ist; wir behalten uns vor, an anderem Orte auf diese Frage zurückzukommen.

Wir kehren nun zu unserem elektromagnetischen Sprungwertproblem zurück. Es ist also dort noch eine Bedingung 5. hinzuzufügen, welche das Unendlichwerden des Feldes in der Randlinie des Schirms festlegt. Die Linienintegrale in (21 b) lehren, wie diese Unendlichkeiten vorzuschreiben sind. Erst nach Hinzufügung dieser Bedingung 5. ist das elektromagnetische Sprungwertproblem lösbar und natürlich ist diese Lösung eindeutig bestimmt, wie man in der üblichen Weise zeigt.

Wir können die so gefundene Lösung am kürzesten durch die Formel (21 c) charakterisieren. Die vorzuzugenden Diskontinuitäten der tangentiellen Feldkomponenten bestimmen eindeutig das Paar Hertzscher Vektoren  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$ , welche

die Lösung  $e$  und  $h$  vollständig abzuleiten gestatten. Wenn also irgendein elektromagnetisches Sprungwertproblem zu lösen ist, genügt die Angabe der tangentiellen Diskontinuitäten.

Es erübrigt noch einiges über die *Umgruppierung des elektromagnetischen Sprungwertproblems* zu sagen, die derjenigen analog ist, die wir in der vorangegangenen Arbeit für das skalare Sprungwertproblem bei der Wellengleichung vorgenommen haben (vgl. daselbst A., Nr. 16). Es handelte sich dort um den Übergang von der beleuchteten Schirmfläche auf die Schattengrenze, also um das Sprungwertproblem für das Beugungsintegral, das aus dem Kirchhoffschen Flächenintegral nach Weglassung des geometrisch-optischen Residuums entsteht. Dieses Sprungwertproblem war durch die unstetige Lichtverteilung der geometrischen Optik gegeben, welche durch das Beugungsintegral zu einer stetigen zu ergänzen ist. Eben dieses Sprungwertproblem ermöglichte auch den Übergang von der Kirchhoffschen zur Sommerfeldschen Lösung, indem die im nichtphysikalischen Raum der Schattengrenze des physikalischen Raums korrespondierende Schattengrenze in den Kreis der Betrachtungen gezogen wurde und für diese nichtphysikalische Schattengrenze die entgegengesetzten Sprungwerte wie für die physikalische Schattengrenze vorgeschrieben wurden, zum Unterschiede von der Kirchhoffschen Lösung, bei der das Beugungsintegral sich an der physikalischen Schattengrenze genau wie an der nichtphysikalischen verhält.

Zwecks Übertragung des gegenwärtigen elektromagnetischen Sprungwertproblems auf die Schattengrenze hat man offenbar genau den gleichen Ansatz der Hertzschen Vektoren  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  wie in (21c), jedoch mit den tangentiellen Sprungwerten für die Schattengrenze und mit Erstreckung über die Fläche der letzteren zu machen. Wünscht man hiervon eine Erweiterung im Sinne der Sommerfeldschen *zweiwertigen* Lösung zu machen, so hat man an Stelle von (21c) solche Hertzschen Vektoren zu nehmen, die durch Integration über die bezüglichen tangentiellen Diskontinuitäten an der physikalischen bzw. nichtphysikalischen Schattengrenze hervorgehen, wobei jedoch an Stelle von  $e^{-ikr_P/r_P}$  (im Falle einfach periodischer Wellen) die *Sommerfeldsche zweiwertige Grundlösung der Wellengleichung* zu nehmen ist (vgl. die vorangehende Arbeit A., Nr. 18). Es ist klar, daß man hiermit die

Bedingungen des Sommerfeldschen elektromagnetischen Sprungwertproblems erfüllt, da die so bestimmten Funktionen des Aufpunktes  $P$  sicherlich zweiwertig sind und bei Annäherung von  $P$  an die bezügliche Schattengrenze die entsprechenden Sprungwerte aufweisen, überdies die Maxwell'schen Gleichungen lösen.

## 8. Anwendung auf eine Kugelwelle und eine ebene Welle.

Für das Folgende legen wir die Form (21b) zugrunde, d. i. wir setzen das *gesamte* Feld

$$(22a) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + e, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 + h,$$

wobei  $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0$  das *ungestörte* oder *einfallende* Feld,  $e, h$  das zusätzliche *Störungsfeld*, das von der Anwesenheit des schwarzen Schirms herrührt, bedeuten, und  $e, h$  wie folgt gegeben sind:

$$(22b) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi e(P) &= \int df \left\{ \mathfrak{E}^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \right) - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{E}^0 \right\} \\ &\quad + \oint [d\mathfrak{z} \mathfrak{E}^0] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} + \frac{1}{ik} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{z} \mathfrak{H}^0) \frac{e^{-ikr_P}}{r_P}, \\ 4\pi h(P) &= \int df \left\{ \mathfrak{H}^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \right) - \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}^0 \right\} \\ &\quad + \oint [d\mathfrak{z} \mathfrak{H}^0] \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} - \frac{1}{ik} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{z} \mathfrak{E}^0) \frac{e^{-ikr_P}}{r_P}. \end{aligned} \right.$$

Das Flächenintegral geht über die beleuchtete Oberfläche des schwarzen Schirms, die Linienintegrale über deren Berandung.

Nach den Entwicklungen der früheren Arbeit (A., Abschnitt II) läßt sich das hier auftretende Flächenintegral ebenfalls in ein Integral über die Berandung verwandeln, da sein Wert nur von dieser abhängt, wenn gebührende Rücksicht auf das „Residuum“ genommen wird, d. h. auf den Umstand, ob die Lichtpunkte (Pole von  $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0$ ) dem Aufpunkt  $P$  durch den schwarzen Schirm verdeckt werden oder „sichtbar“ sind.

In der früheren Arbeit hatten wir diese Umformung des Flächenintegrals für den Fall einer einfallenden skalaren Kugelwelle (ein einziger Lichtpunkt) durchgeführt. Es handelt sich nun um die Übertragung auf die elektromagnetische Theorie. Hier ist bekanntlich nach Hertz eine Kugelwelle gegeben

durch folgende Werte unseres Hertzschen Vektorenpaares für das ungestörte Feld  $\mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0$

$$(23) \quad \mathfrak{M}^0 = 0, \quad \mathfrak{M}^0(Q) = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{t} u^0(L, Q).$$

Hier bedeuten:  $\mathfrak{t}$  den Einheitsvektor der  $z$ -Achse, die parallel zur Achse eines im Punkte  $L$  befindlichen Hertzschen oszillierenden Dipols sei,  $u^0(L, Q) = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}$ ,  $r_{LQ}$  die Entfernung von  $L$  zum Aufpunkt  $Q$ . Somit kommt gemäß (7)

$$\mathfrak{E}^0(Q) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}_Q \frac{\partial}{\partial z_Q} u^0(L, Q) + \frac{k^2}{4\pi} \mathfrak{t} u^0(L, Q),$$

$$\mathfrak{H}^0(Q) = \frac{ik}{4\pi} [\text{grad}_Q u^0(L, Q), \mathfrak{t}].$$

Hierfür kann man nach Vertauschung von Lichtpunkt  $L$  und Aufpunkt  $Q$  auch schreiben

$$\mathfrak{E}^0(Q) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}_L \frac{\partial}{\partial z_L} u^0(L, Q) + \frac{k^2}{4\pi} \mathfrak{t} u^0(L, Q),$$

$$\mathfrak{H}^0(Q) = -\frac{ik}{4\pi} [\text{grad}_L u^0(L, Q), \mathfrak{t}].$$

In unseren Flächenintegralen in (22b) haben wir daher:

$$\begin{aligned} \int df_Q \left\{ \mathfrak{E}_{(Q)}^0 \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial \mathfrak{E}^0(Q)}{\partial n_Q} \right\} &= \frac{1}{4\pi} \times \\ \text{grad}_L \frac{\partial}{\partial z_L} \int df_Q \left\{ u^0(L, Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n_Q} (u^0(L, Q)) \right\} \\ &+ \frac{k^2}{4\pi} \mathfrak{t} \int df_Q \left\{ \begin{array}{cccc} & & & \end{array} \right\} \end{aligned}$$

und analog für  $\mathfrak{H}^0$ .

Das Flächenintegral

$$\int df_Q \left\{ \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \right) \right\}$$

ist aber nach A., (7) gleich

$$\oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{r}_{LQ}]) \frac{1}{r_{PQ} r_{LQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{r}_{LQ})} \frac{e^{-ik(\mathfrak{r}_{PQ} + \mathfrak{r}_{LQ})}}{r_{PQ} r_{LQ}} - \{ \{ 4\pi u^0(L, P) \} \},$$



für wo das zweite Glied nur auftritt, wenn ein Durchstoßpunkt der Linie  $\overrightarrow{LP}$  mit dem schwarzen Schirm vorhanden ist. Hierfür schreiben wir gemäß A, (4) kurz:

$$4\pi u^B(L, P) - \{4\pi u^0(L, P)\}$$

und haben somit für das gesamte elektromagnetische Feld, das eine Kugelwelle (23) eines in  $L$  befindlichen Hertzschen Oszillators, dessen Achse  $\mathfrak{f}$  der  $z$ -Achse parallel ist, in Gegenwart eines schwarzen Schirms erregt:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}(P) &= \mathfrak{E}^*(L, P) + \frac{1}{4\pi} \text{grad}_L \frac{\partial}{\partial x_L} u^B(L, P) + \frac{k^2}{4\pi} \mathfrak{f} u^B(L, Q) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint [d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{E}^0] w(Q, P) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi i k} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{H}^0) w(Q, P), \\ \mathfrak{H}(P) &= \mathfrak{H}^*(L, P) + \frac{i k}{4\pi} [\text{grad}_L u^B(L, P), \mathfrak{f}] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint [d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{H}^0] w(Q, P) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i k} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{E}^0) w(Q, P). \end{aligned} \right.$$

Hier bedeuten:

$$\text{im „Licht“: } \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}^*(L, P) &= \mathfrak{E}^0(L, P) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}_P \frac{\partial}{\partial x_P} u_0(L, P) \\ &\quad + \frac{k^2}{4\pi} \mathfrak{f} u^0(L, P), \\ \mathfrak{H}^*(L, P) &= \mathfrak{H}^0(L, P) = + \frac{i k}{4\pi} [\text{grad}_P u^0(L, P), \mathfrak{f}], \end{aligned} \right.$$

$$\text{im „Schatten“: } \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}^*(L, P) &= 0, \\ \mathfrak{H}^*(L, P) &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$w(Q, P) = \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}},$$

$$u^B(L, P) = \frac{1}{4\pi} \oint (d\mathfrak{s}_Q [r_{PQ} r_{LQ}]) \frac{1}{r_{PQ} r_{LQ} + (r_{PQ} r_{LQ})} \frac{e^{-ik(r_{LP} + r_{LQ})}}{r_{LP} r_{LQ}},$$

$r_{PQ}$  bzw.  $r_{LQ}$  den von  $P$  bzw.  $L$  nach  $Q$  hin gezogenen Radiusvektor.

Hieraus folgt für *paralleles Licht* (ebene Welle) durch  $\lim L \rightarrow \infty$ , wenn  $\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0$  die Grenzwerte<sup>1)</sup>

$$\mathfrak{E}^0(Q) = \mathfrak{A} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})},$$

$$\mathfrak{H}^0(Q) = [\mathfrak{f} \mathfrak{A}] e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}$$

annehmen, wobei  $(\mathfrak{A} \mathfrak{f}) = 0$  und  $\mathfrak{f}$  den Einheitsvektor in der Richtung der einfallenden Strahlen (also *entgegengesetzt* der Richtung zum  $\infty$  fernen Lichtpunkt hin),  $\mathfrak{M}_Q$  den vom Ursprung der Koordinaten nach  $Q$  hin gezogenen Radiusvektor bedeuten:

$$(24a) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}(P) &= \mathfrak{E}^*(P) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \mathfrak{A} \oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{f}]) \frac{1}{r_{PQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{f})} \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint [d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{A}] \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}} \\ &+ \frac{1}{4\pi ik} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{f} \mathfrak{A}]) \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}}, \\ \mathfrak{H}(P) &= \mathfrak{H}^*(P) \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{f} \mathfrak{A}] \oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{f}]) \frac{1}{r_{PQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \mathfrak{f})} \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{f} \mathfrak{A}]) \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}} \\ &- \frac{1}{4\pi ik} \text{grad}_P \oint (d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{A}) \frac{e^{-ikr_{PQ}} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{r_{PQ}}. \end{aligned} \right.$$

#### IV. Die schwarze Halbebene.

Wir wollen nun von der vorstehenden Lösung (24a), welche die elektromagnetische Fassung der in dem Sinne eines Sprungwertproblems reformierten Kirchhoffschen Beugungstheorie

1) Man beachte hierzu, wenn  $\mathfrak{R}_L$  den vom Ursprung der Koordinaten nach  $L$  hin gezogenen Radiusvektor,  $R_L$  seinen Betrag,  $\mathfrak{f} = -\frac{\mathfrak{R}_L}{R_L}$  bedeuten:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \rightarrow \frac{e^{-ikR_L} e^{-ik(\mathfrak{M}_Q \mathfrak{f})}}{R_L},$$

$$\frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR_L}}{R_L} \cdot \{\mathfrak{f} - \mathfrak{f}(\mathfrak{f} \mathfrak{f})\} = \mathfrak{A}.$$

darstellt, eine Anwendung auf die Beugung parallelen Lichts an der schwarzen Halbebene machen. Hernach wollen wir die analogen Formeln für die Sommerfeld-Voigtsche schwarze Halbebene aufstellen und schließlich die Energieströmung bei beiden Lösungen studieren, um die „Schwärze“ des Schirms zu prüfen.

Wir spezialisieren insbesondere so, daß das parallele Licht senkrecht zur Kante der Halbebene auffalle. In diesem Falle wird das Problem bloß zweidimensional, also von  $z$  unabhängig, wenn die Kante zur  $z$ -Achse gemacht wird. Die Maxwell'schen Gleichungen zerfallen dann bekanntlich in zwei Gruppen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} &= -ik \mathfrak{E}_x & \text{und} & & -\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} &= ik \mathfrak{H}_x \\ +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} &= -ik \mathfrak{E}_y & & & +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} &= ik \mathfrak{H}_y \end{aligned}$$

(die übrigen 4 Gleichungen werden überzählig)<sup>1)</sup>, von welchen die erste Gruppe die Feldkomponenten  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ , die zweite Gruppe die Feldkomponenten  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$  umfaßt. Die Gesamtlösung entsteht durch lineare Superposition dieser beiden selbständigen Gruppen, von denen die erste einem senkrecht zur Kante schwingenden Lichtvektor (also zur Kante paralleler Polarisationssebene) des einfallenden Lichts, die zweite einem parallel zur Kante schwingenden Lichtvektor (also zur Kante senkrechter Polarisationssebene) entspricht.

Da bei parallelem Licht (ebenen Wellen) elektrischer und magnetischer Vektor durch einfache Vertauschung der konstanten Amplitudenvektoren ineinander übergehen, genügt es, einen der beiden Fälle zu behandeln, da der andere durch Vertauschung der Rollen von magnetischem und elektrischem Vektor daraus hervorgeht.

Wir entscheiden uns im folgenden für den zweiten Fall: Der elektrische Vektor des einfallenden Lichts sei also parallel zur Kante. Wir wollen wieder wie in A, VI, annehmen, daß die Halbebene die Ebene  $y = 0$ ,  $x > 0$  sei und führen in der zur Kante senkrechten  $x y$ -Ebene ein Polarkoordinatensystem

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi$$

ein.

1) Natürlich müssen die 6 Felder so gewählt sein, daß sie sämtlich die Schwingungsgleichung befriedigen.

Dann ist das einfallende Feld nach unseren Voraussetzungen im Aufpunkte  $P$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x^0 = \mathfrak{E}_y^0 = 0, \quad \mathfrak{E}_z^0 &= e^{ik(x_P \cos \varphi_L + y_P \sin \varphi_L)} = e^{ik_{LP} \cos \vartheta}, \\ \mathfrak{H}_x^0 &= -\sin \varphi_L e^{ik_{LP} \cos \vartheta}, \quad \mathfrak{H}_y^0 = \cos \varphi_L e^{ik_{LP} \cos \vartheta}, \quad \mathfrak{H}_z^0 = 0. \end{aligned}$$

Hier ist  $\varphi_L$  der Winkel zwischen  $x$ -Achse und der Richtung nach dem Lichtpunkt  $L$  hin,  $\vartheta$  bedeutet wieder (Fig. 1):

$$\vartheta = \varphi_L - \varphi_P.$$

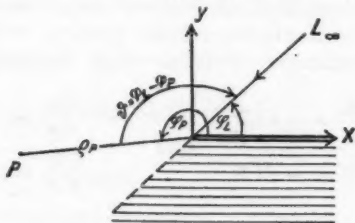


Fig. 1.

### 9. Die Kirchhoffsche Lösung für die schwarze Halbebene.

Nunmehr liefern die Formeln (24a), wenn in den Linienintegralen die Substitution

$$z_Q - z_P = \varrho_P \sinh b$$

gemacht wird, wo  $z_Q$  sowohl wie  $b$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_z(P) &= \mathfrak{E}_z^*(P) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db \frac{\sin \vartheta}{\cosh b + \cos \vartheta} e^{-ik_{LP} \cosh b}, \\ \left. \begin{aligned} \{\mathfrak{H}_x(P)\} &= \{\mathfrak{H}_x^*(P)\} + \left\{ \frac{-\sin \varphi_L}{\cos \varphi_L} \right\} \frac{1}{2\pi} \times \\ \{\mathfrak{H}_y(P)\} &= \{\mathfrak{H}_y^*(P)\} + \left\{ \frac{\cos \varphi_P}{\sin \varphi_P} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db \frac{\sin \vartheta}{\cosh b + \cos \vartheta} e^{-ik_{LP} \cosh b} \\ &+ \left\{ \frac{-\cos \varphi_L}{-\sin \varphi_L} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db e^{-ik_{LP} \cosh b} \\ &+ \left\{ \frac{\cos \varphi_P}{\sin \varphi_P} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db \cosh b \cdot e^{-ik_{LP} \cosh b} \end{aligned} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

wo wieder im „Licht“:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x^*(P) &= \mathfrak{E}_x^0(P) = e^{ik_{LP} \cos \vartheta}, \\ \mathfrak{H}_x^*(P) &= \mathfrak{H}_x^0(P) = -\sin \varphi_L e^{ik_{LP} \cos \vartheta}, \\ \mathfrak{H}_y^*(P) &= \mathfrak{H}_y^0(P) = \cos \varphi_L e^{ik_{LP} \cos \vartheta},\end{aligned}$$

im „Schatten“:

$$\mathfrak{E}_x^*(P) = \mathfrak{H}_x^*(P) = \mathfrak{H}_y^*(P) = 0.$$

Man beachte, daß hier überall der Zeitfaktor

$$e^{ikct}$$

unterdrückt ist und daß von den angeschriebenen komplexen Werten der reelle Teil zu nehmen ist.

Man beachte ferner, daß die in  $\mathfrak{H}_x$  bzw.  $\mathfrak{H}_y$  auftretenden Linienintegrale

$$\int_0^\infty db e^{-ik_{LP} \cosh b} \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty db \cosh b e^{-ik_{LP} \cosh b}$$

eigentlich divergieren. Bezieht man sich aber auf die Formeln (24a) und vergleicht mit (24), so sieht man, daß es sich ursprünglich um Integrale von z. B. folgender Form handelt:

$$\frac{1}{4\pi} \oint [d\mathfrak{s}_Q \mathfrak{H}_Q^0] \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} = -\frac{ik}{16\pi^3} \oint \left[ d\mathfrak{s}_Q \left[ \frac{r_{LQ}}{r_{LQ}} \mathfrak{f} \right] \right] \frac{e^{-ik(r_{LQ} + r_{PQ})}}{r_{LQ} r_{PQ}} \times \left( ik + \frac{1}{r_{LQ}} \right),$$

wo

$$\frac{r_{LQ}}{r_{LQ}} = \text{grad}_Q r_{LQ} = \frac{\mathfrak{R}_Q - \mathfrak{R}_L}{r_{LQ}}$$

und  $\mathfrak{R}_Q$  bzw.  $\mathfrak{R}_L$  die vom Ursprung der Koordinaten nach  $Q$  bzw.  $L$  hingezogenen Radienvektoren bedeuten. Hieraus wird für  $\lim L \rightarrow \infty$  und

$$\lim \frac{\mathfrak{R}_L}{R_L} = -\mathfrak{f}, \quad \text{ferner} \quad \frac{k^3}{4\pi} \{ \mathfrak{f} - \mathfrak{f}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}) \} = \mathfrak{A}, \quad \text{endlich}^1)$$

$$\lim \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \rightarrow \frac{e^{-ikR_L} e^{-ik(\mathfrak{R}_Q \mathfrak{f})}}{R_L}$$

der Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi} \oint (d\mathfrak{s}_Q [\mathfrak{f} \mathfrak{A}]) \frac{e^{-ikR_L} e^{-ik(\mathfrak{R}_Q \mathfrak{f})}}{R_L} \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}$$

1) wegen  $r_{LQ}^2 = R_L^2 + R_Q^2 + 2(\mathfrak{R}_L \mathfrak{R}_Q)$  und  $\lim_{L \rightarrow \infty} r_{LQ} \rightarrow R_L + (\mathfrak{R}_Q \mathfrak{f})$  + Glieder mit  $1/R_L$ .

+ Glieder höherer Ordnung in  $1/R_L$ . Es ist also der Faktor  $\frac{e^{-ikR_L}}{R_L}$ , der in (24a) weggelassen wurde, was die scheinbare Divergenz der obigen Integrale hervorruft. Denn die ursprünglichen Integrale sind konvergent; z. B. läßt sich das obige Integral auf

$$\int |d\mathfrak{s}_Q| \frac{e^{-ik(r_{LQ} + r_{PQ})}}{r_{LQ} r_{PQ}}$$

zurückführen, welches ersichtlich konvergiert, auch wenn als Randlinie die unendlich lange  $z$ -Achse genommen wird. Man setze z. B.

$$|d\mathfrak{s}_Q| = dz_Q, \quad r_{LQ}^2 = \varrho_L^2 + (z_Q - z_L)^2, \quad r_{PQ}^2 = \varrho_P^2 + (z_Q - z_P)^2,$$

ferner

$$\varrho_L \varrho_P e^b = (r_{LQ} - z_L + z_Q)(r_{PQ} - z_P + z_Q),$$

wodurch man erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} db \frac{e^{-ik(r_{LQ} + r_{PQ})}}{r_{LQ} + r_{PQ}} = \int_{-\infty}^{\infty} db \frac{e^{-ikV \dots \dots}}{\sqrt{\varrho_L^2 + \varrho_P^2 + 2\varrho_L \varrho_P \cosh b + (z_L - z_P)^2}}.$$

Hieraus erhält man durch  $\lim \varrho_L \rightarrow \infty$  bei endlich bleibendem  $z_L$

$$\int_{-\infty}^{\infty} db \frac{e^{-ik(\varrho_L + \varrho_P \cosh b + \dots)}}{\varrho_L} (1 + \dots),$$

wo Glieder mit  $1/\varrho_L$  und höherer Ordnung weggelassen sind. Die vorhin aufgetretene Divergenz ist also nur scheinbar.

Um diese scheinbare Divergenz zu beseitigen, genügt es, in der üblichen Weise einen Konvergenzfaktor hinzuzufügen, indem man zu  $\varrho_P$  einen imaginären Teil  $-i\sigma_P$ , wo  $\sigma_P > 0$ , aber sonst beliebig klein ist, addiert. In diesem Fall erhalten die Integrale

$$\int_0^{\infty} db e^{-ik(\varrho_P - i\sigma_P) \cosh b} = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k[\varrho_P - i\sigma_P]),$$

$$\int_0^{\infty} db e^{-ik(\varrho_P - i\sigma_P) \cosh b} \cosh b = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k[\varrho_P - i\sigma_P])$$

einen wohlbekannten Sinn.<sup>1)</sup> Sie werden bis auf konstante Faktoren gleich den Hankelschen Zylinderfunktionen zweiter

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909, S. 170.

Art Nullter bzw. erster Ordnung des komplexen Arguments  $k(\varrho_P - i\sigma_P)$ .

Geht man nunmehr zur Grenze  $\sigma_P \rightarrow 0$  über, so erkennt man durch stetige Fortsetzung, daß man statt (25) erhält:

$$(25a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z(P) &= \mathfrak{E}_z^*(P) + u^B(P), \\ \mathfrak{H}_z(P) &= \mathfrak{H}_z^*(P) - u^B(P) \sin \varphi_L - \cos \varphi_L \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k \varrho_P) \\ &\quad - \cos \varphi_P \frac{1}{4} H_1^{(2)}(k \varrho_P), \\ \mathfrak{H}_y(P) &= \mathfrak{H}_y^*(P) + u^B(P) \cos \varphi_L - \sin \varphi_L \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k \varrho_P) \\ &\quad - \sin \varphi_P \frac{1}{4} H_1^{(2)}(k \varrho_P), \end{aligned} \right.$$

wo im „Licht“, d. i. für  $-\pi < \vartheta < \pi$

$$\mathfrak{E}_z^*(P) = u^0(P), \quad \mathfrak{H}_z^*(P) = -u^0(P) \sin \varphi_L,$$

$$\mathfrak{H}_y^*(P) = u^0(P) \cos \varphi_L,$$

während sie im „Schatten“, d. i. für  $|\vartheta| > \pi$  Null sind. Hierbei bedeuten:

$$u^0(P) = e^{ik\varrho_P \cos \vartheta},$$

$$u^B(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db \frac{\sin \vartheta}{\cosh b + \cos \vartheta} e^{-ik\varrho_P \cosh b}.$$

Es empfiehlt sich, zu Zylinderkoordinaten überzugehen:

$$\mathfrak{H}_\varrho = \mathfrak{H}_x \cos \varphi_P + \mathfrak{H}_y \sin \varphi_P,$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\mathfrak{H}_x \sin \varphi_P + \mathfrak{H}_y \cos \varphi_P.$$

Man erhält:

$$25b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= u^* + u^B, \\ \mathfrak{H}_\varrho &= -(u^* + u^B) \sin \vartheta \\ &\quad + \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \varrho_P) \cos \vartheta - \frac{1}{4} H_1^{(2)}(k \varrho_P) \\ \mathfrak{H}_\varphi &= +(u^* + u^B) \cos \vartheta + \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \varrho_P) \sin \vartheta, \end{aligned} \right.$$

wo  $u^* = u^0$  für  $|\vartheta| < \pi$  und  $= 0$  für  $|\vartheta| > \pi$ .

Von diesen Formeln werden wir zwei Auswertungen geben, eine für großes  $k \varrho_P$ , d. h. für Entfernungen des Aufpunkts  $P$  von der beugenden Kante, die groß gegen die Wellenlänge  $\lambda$

sind, und eine für sehr kleines  $\varrho_P$ , d. h. für einen in die Kante hineinrückenden Aufpunkt.

1. Große Entfernungen ( $k \varrho_P \rightarrow \infty$ ):

Mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho} = i k \mathfrak{H}_\varphi$$

leitet man die Differentialgleichung ab:

$$\frac{\partial u^B}{\partial (k \varrho)} = i \cos \vartheta u^B - \frac{1}{4} H_0^{(2)}(k \varrho) \sin \vartheta,$$

woraus die Integraldarstellung folgt:

$$u^B = \frac{\sin \vartheta}{4} \int_{k \varrho}^{\infty} d\zeta H_0^{(2)}(\zeta) e^{i(k \varrho - \zeta) \cos \vartheta}.$$

Setzt man hier  $H_0^{(2)}(\zeta)$  die für große  $\zeta$  gültige semikonvergente Entwicklung ein (Jahnke-Emde, a. a. O., S. 99)

$$H_0^{(2)}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} e^{-i(\zeta - \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{\zeta}} \left\{ -1 - \frac{i}{8\zeta} + \frac{9}{128\zeta^2} \dots \right\},$$

so erhält man eine semikonvergente Entwicklung

$$u^B = \frac{1}{4\pi} e^{-i(k \varrho + \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varrho}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ 1 + \frac{i}{8k \varrho} \left[ 1 + \frac{2}{\cos^2 \vartheta/2} \right] - \frac{9}{128k^2 \varrho^2} \left[ 1 + \frac{4}{3 \cos^2 \vartheta/2} + \frac{8}{3 \cos^4 \vartheta/2} \right] + \dots \right\},$$

gültig *außerhalb* eines gewissen Bereiches  $2k \varrho \cos^2 \vartheta/2 \leq \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  eine kleine positive Größe ist.

Dieser Bereich umgibt die Schattengrenze in Form einer schmalen Parabel (vgl. den analogen Bereich bei Sommerfeld, Math. Ann. 47. 368. 1896).

Nimmt man noch die semikonvergente Entwicklung

$$H_1^{(2)}(k \varrho) = \frac{1}{\pi} e^{-i(k \varrho + \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varrho}} \left\{ -1 + \frac{3i}{8k \varrho} - \frac{15}{128k^2 \varrho^2} + \dots \right\}$$

hinzu, so erhält man schließlich bei Berücksichtigung des Zeitfaktors  $e^{\frac{1}{2} i k c t} = e^{i v t}$  folgende reelle Grenzwerte für  $k \varrho \rightarrow \infty$ :



$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= u^* + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ \cos \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8k\rho} \sin \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \times \left[ 1 + \frac{2}{\cos^2 \vartheta/2} \right] + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varphi &= -u^* \sin \vartheta + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \left\{ \cos \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k\rho} \sin \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\cos^2 \vartheta/2} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varrho &= u^* \cos \vartheta + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ -\cos \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8k\rho} \sin \left( \nu t - k\rho - \frac{\pi}{4} \right) \times \left[ \frac{2}{\cos^2 \vartheta/2} - 3 \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

$u^*$  bedeutet hier  $\cos(\nu t + k\rho \cos \vartheta)$  für  $|\vartheta| < \pi$  und Null für  $|\vartheta| > \pi$ ; der Index  $P$  bei  $\rho$  ist weggelassen. Die Entwicklung ist nur bis zu Gliedern  $1/(k\rho)^{3/2}$  geführt.

Das wesentlichste Resultat ist, daß im Schatten ( $|\vartheta| > \pi$ ) die radiale Komponente des Feldes klein wird von der Ordnung  $1/(k\rho)^{3/2}$  im Gegensatz zu den beiden anderen Komponenten, die wie  $1/(k\rho)^{1/2}$  gehen. Hierauf beruht es, daß keine zirkulatorische Energieströmung um die beugende Kante stattfindet, daß mithin der Schirm wirklich schwarz ist (vgl. weiter unten Nr. 11).

Über den scharfen Abfall der Amplitude von  $\mathfrak{E}_z$  im Schatten vgl. A, Nr. 29.

Die Formeln (26) gelten für  $\perp$  zur Kante polarisiertes Licht. Ganz genau dieselben Formeln erhält man für parallel zur Kante polarisiertes Licht, wenn man  $\mathfrak{E}_z$  bzw.  $\mathfrak{H}_\varphi$  bzw.  $\mathfrak{H}_\varrho$  mit  $\mathfrak{H}_z$  bzw.  $-\mathfrak{E}_\varphi$  bzw.  $-\mathfrak{E}_\varrho$  vertauscht. Hieraus folgt, daß der Polarisationszustand des Lichtes durch die Beugung ungeändert bleibt, oder: das am schwarzen Schirm gebeugte natürliche Licht ist unpolarisiert.

Wünscht man die Werte des Feldes an der Schattengrenze  $\vartheta = -\pi$  zu kennen, so hat man dortselbst<sup>2)</sup>

$$u^* + u^B = \frac{1}{2} u^0 = \frac{1}{2} \cos(\nu t - k\rho),$$

1) Berücksichtigt man in (26) nur die Glieder mit  $1/\sqrt{k\rho}$  (die Beugungswelle für große Entfernungen von der Kante), so erhält man einen interessanten Typus von bisher unbekannten Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen. Über dessen Deutung vgl. die vorläufige Mitteilung des Verf.s in Wien. Ber. 129. 1920.

2) Vgl. die unter 2. folgende Reihenentwicklung für  $u^B$ .

mithin:

$$(26a) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho), \\ \mathfrak{H}_\varrho &= -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \varrho) - \frac{1}{4} H_1^{(2)}(k \varrho) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varrho}} \\ &\quad \left\{ \cos\left(\nu t - k \varrho - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8k \varrho} \sin\left(\nu t - k \varrho - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varphi &= -\frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho). \end{aligned} \right.$$

Die radiale Komponente ist hier von der Ordnung  $1/(k \varrho)^{1/2}$ , die beiden anderen Komponenten rühren vom einfallenden Lichte her, dessen Amplitude allerdings an der Schattengrenze auf die Hälfte herabgesetzt ist. Mithin findet (wegen der Ordnung von  $\mathfrak{H}_\varrho$ ) eine schwache zirkulatorische Energieströmung senkrecht zur Schattengrenze statt.

Untersucht man endlich die Verhältnisse an der Schattengrenze des nichtphysikalischen Raumes  $\vartheta = +\pi$ , so erinnert man sich (A, Nr. 11), daß dortselbst eine *Unstetigkeit* stattfindet.

Im „Licht“  $\vartheta = \pi - 0$ :

$$u^* + u^B = \frac{3}{2} u^0 = \frac{3}{2} \cos(\nu t - k \varrho).$$

Im „Schatten“  $\vartheta = \pi + 0$ :

$$u^* + u^B = -\frac{1}{2} u^0 = -\frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho).$$

Somit für  $\vartheta = \pi - 0$ :

$$(26b) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \frac{3}{2} \cos(\nu t - k \varrho), \\ \mathfrak{H}_\varrho &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varrho}} \left\{ \cos\left(\nu t - k \varrho - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8k \varrho} \sin\left(\nu t - k \varrho - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varphi &= -\frac{3}{2} \cos(\nu t - k \varrho), \end{aligned} \right.$$

und für  $\vartheta = \pi + 0$ :

$$(26c) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{2} \cos(\nu t - k\rho), \\ \mathfrak{E}_\varrho = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \left\{ \cos\left(\nu t - k\rho - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8k\rho} \sin\left(\nu t - k\rho - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right\}, \\ \mathfrak{E}_\varphi = +\frac{1}{2} \cos(\nu t - k\rho). \end{cases}$$

2. In der Kante ( $\varrho_P \sim 0$ ):

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u^B}{\partial(k\rho)} = i \cos \vartheta u^B - \frac{1}{4} \sin \vartheta H_0^{(2)}(k\rho)$$

und der Entwicklung

$$H_0^{(2)}(k\rho) = \left(1 - \frac{2i}{\pi} \ln \gamma \frac{k\rho}{2}\right) J_0(k\rho) + \frac{2i}{\pi} P_0(k\rho),$$

wo

$$J_0(k\rho) = 1 - \left(\frac{k\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^4 - \dots,$$

$$P_0(k\rho) = -\left(\frac{k\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots,$$

$$\ln \gamma = 0,57722,$$

leitet man ab:

$$\begin{aligned} u^B &= u^B(0) e^{ik\rho \cos \vartheta} \\ &+ i \sin \vartheta \left\{ k\rho \left( \ln \frac{\gamma^2}{2} - 1 \right) + \frac{(k\rho)^2}{2} i \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. \left( \ln \frac{\gamma^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} \right) + \dots \right\} \\ &+ i \sin \vartheta \ln(k\rho) \left\{ k\rho + \frac{(k\rho)^2}{2} i \cos \vartheta + \dots \right\}, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} u^B(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db \frac{\sin \vartheta}{\cosh b + \cos \vartheta} = \frac{\vartheta + 2\pi}{2\pi} & -3\pi < \vartheta < -\pi, \\ &= \frac{\vartheta}{2\pi} & -\pi < \vartheta < \pi, \\ &= \frac{\vartheta - 2\pi}{2\pi} & \pi < \vartheta < 3\pi. \end{aligned}$$

Somit wird mit  $u^* = \cos \nu t$  oder  $= 0$ :

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = u^* + u^B(0) \cos \nu t - \sin \vartheta k \varrho \ln(k \varrho) \sin \nu t + \dots, \\ \mathfrak{H}_\varrho = -\sin \vartheta \cdot \{u^* + u^B(0) \cos \nu t - \sin \vartheta k \varrho \ln k \varrho \sin \nu t + \dots\} \\ \quad + \cos \vartheta \left\{ \cos \nu t \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma k \varrho}{2} - \sin \nu t \cdot \frac{1}{4} + \dots \right\} \\ \quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ \sin \nu t \cdot \left( -\frac{1}{k \varrho} + \frac{k \varrho}{2} \ln \frac{\gamma k \varrho}{2} \right) + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = \cos \vartheta \{u^* + u^B(0) \cos \nu t - \sin \vartheta k \varrho \ln k \varrho \sin \nu t + \dots\} \\ \quad + \sin \vartheta \left\{ \cos \nu t \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma k \varrho}{2} - \sin \nu t \cdot \frac{1}{4} + \dots \right\}, \end{cases}$$

wobei Gebrauch gemacht ist von der Entwicklung:

$$H_1^{(2)}(k \varrho) = \left(1 - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma k \varrho}{2}\right) J_1(k \varrho) + \frac{2i}{\pi} P_1(k \varrho),$$

$$J_1(k \varrho) = \frac{k \varrho}{2} - \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{k \varrho}{2}\right)^3 + \dots,$$

$$P_1(k \varrho) = \frac{1}{k \varrho} + \frac{1}{4} k \varrho - \frac{5}{8} \left(\frac{k \varrho}{2}\right)^3 + \dots$$

Die Entwicklung von  $\mathfrak{E}_z$  ist geführt bis ausschließlich Glieder  $(k \varrho)^2 \ln k \varrho$  usw. bzw.  $k \varrho$  usw.; beibehalten ist das am schwächsten verschwindende Glied  $(k \varrho) \ln k \varrho$ .  $\mathfrak{E}_z$  selbst ist endlich, jedoch unstetig in der Kante wie  $u^B(0)$ .

Die Entwicklung von  $H_0^{(2)}(k \varrho)$  in  $\mathfrak{H}_\varrho$  bzw.  $\mathfrak{H}_\varphi$  enthält das *unendlich werdende* Glied  $\ln k \varrho$  und das konstante Glied; weggelassen sind Glieder  $(k \varrho)^2 \ln k \varrho$  usw. bzw.  $k \varrho$  usw.

Die Entwicklung von  $H_1^{(2)}(k \varrho)$  in  $\mathfrak{H}_\varrho$  enthält das *unendlich werdende* Glied  $1/k \varrho$  und das am schwächsten verschwindende Glied  $k \varrho \ln k \varrho$ ; weggelassen sind  $(k \varrho)^2 \ln k \varrho$  usw. bzw.  $k \varrho$  usw.

Es werden somit, wie vorausszusehen war,  $\mathfrak{H}_\varrho$  bzw.  $\mathfrak{H}_\varphi$  in der Kante unendlich wie  $1/\varrho$  bzw.  $\ln \varrho$  für  $\varrho \rightarrow 0$ ; überdies sind sie daselbst unstetig.

###### 10. Die Sommerfeld-Voigtsche zweiwertige Lösung für die schwarze Halbebene.

Um getreu der in Nr. 8 (gegen Schluß) skizzierten Umgruppierung des elektromagnetischen Sprungwertproblems für die Schattengrenze zu verfahren, müßten wir, wenn wir das Sommerfeldsche Analogon zur Kirchhoffschen Lösung

suchen, wieder die zweiwertige „Grundlösung“ des Riemannschen Doppelraums für die schwarze Halbebene aufsuchen, welche an Stelle der einwertigen Kirchhoffschen „Grundlösung“ der Wellengleichung

$$u^0 = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

zu treten hat, sonach das Paar Hertzscher Vektoren  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  aus den an der physikalischen bzw. nichtphysikalischen Schattengrenze nach Sommerfeld in antisymmetrischer Weise vorzuschreibenden Diskontinuitäten der tangentiellen Feldkomponenten mit Hilfe dieser Grundlösung aufbauen und daraus in bekannter Weise das Feld ableiten.

Wir ziehen es zur Abkürzung vor, die von Voigt aufgestellte fertige Lösung zu übernehmen und unterdrücken die Identifizierung derselben mit der aus der eben skizzierten Methode entspringenden Lösung. Danach wird<sup>1)</sup> im Falle senkrecht zur Kante polarisierten (einfallenden) Lichts in unseren Bezeichnungen:

$$\mathfrak{E}_z = u^* + v_{(2)}^B,$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = +\frac{1}{ik} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x},$$

wobei

$$v_{(2)}^B = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty db e^{-ik_\varrho \cosh b} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} \cosh \frac{b}{2}}{\cosh b + \cos \vartheta}.$$

Man bestätigt leicht die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial v_{(2)}^B}{\partial (k_\varrho)} = i \cos \vartheta v_{(2)}^B + \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{2\sqrt{i}} H_{1/2}^{(2)}(k_\varrho),$$

wo<sup>2)</sup>

$$H_{1/2}(k_\varrho) = \frac{2i\sqrt{i}}{\pi} \int_0^\infty db e^{-ik_\varrho \cosh b} \cosh \frac{b}{2} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_\varrho}} e^{-ik_\varrho}$$

die Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Art der Ordnung  $1/2$  bedeutet. (Über die Hinzufügung eines Konvergenzfaktors

1) A. Wiegrefe, Dissertation. Leipzig 1912. S. 10, a) oder Ann. d. Phys. 39. S. 449. 1912.

2) Jahnke-Emde, a. a. O. S. 170 bzw. S. 95.

unter dem Integral durch Addition von  $-i\sigma$  zu  $q$  mit  $\sigma > 0$  und  $\lim \sigma \rightarrow 0$  vgl. vorhin.) Ebenso erhält man:

$$-\frac{1}{kq} \frac{\partial v_{(2)}^B}{\partial q} = + \frac{\partial v_{(2)}^B}{\partial \vartheta} = -i \sin \vartheta v_{(2)}^B - \frac{\sin \vartheta/2}{2\sqrt{i}} H_{1/2}^{(2)}(kq).$$

Somit wird in Zylinderkoordinaten:

$$(28) \quad \begin{cases} \mathbb{E}_z = u^* + v_{(2)}^B, \\ \mathfrak{H}_\varrho = -(u^* + v_{(2)}^B) \sin \vartheta + \frac{\sqrt{i}}{2} H_{1/2}^{(2)}(kq) \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = + (u^* + v_{(2)}^B) \cos \vartheta - \frac{\sqrt{i}}{2} H_{1/2}^{(2)}(kq) \cos \frac{\vartheta}{2}. \end{cases}$$

Wir geben wieder 2 Auswertungen für großes  $kq$  bzw. für  $q \sim 0$ .

1. Große Entfernungen ( $kq \rightarrow \infty$ ):

Aus der obigen Differentialgleichung für  $v_{(2)}^B$  hat man

$$v_{(2)}^B = -\frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{2\sqrt{i}} \int_{kq}^{\infty} d\zeta e^{i(kq - \zeta) \cos \vartheta} H_{1/2}^{(2)}(\zeta)$$

und hieraus außerhalb eines Bereichs

$$2kq \cos^2 \vartheta/2 \leq \varepsilon$$

die semikonvergente Entwicklung:

$$v_{(2)}^B = -\frac{1}{4\pi} e^{-i(kq + \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \frac{1}{\cos \vartheta/2} \left\{ 1 + \frac{i}{4kq} \frac{1}{\cos^3 \vartheta/2} + \dots \right\}.$$

Somit schließlich:

$$(28a) \quad \begin{cases} \mathbb{E}_z = u^* - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \frac{1}{\cos \vartheta/2} \left\{ \cos \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4kq} \sin \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\cos^3 \vartheta/2} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varrho = -u^* \sin \vartheta - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \left\{ \cos \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2kq} \sin \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sin \vartheta/2}{\cos^3 \vartheta/2} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = u^* \cos \vartheta + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \frac{1}{\cos \vartheta/2} \left\{ -\cos \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4kq} \sin \left( vt - kq - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\cos \vartheta}{\cos^3 \vartheta/2} + \dots \right\}, \end{cases}$$

wo  $u^* = \cos(vt + kq \cos \vartheta)$  für  $|\vartheta| < \pi$  und  $= \Theta$  für  $|\vartheta| > \pi$ .

Wieder bemerkt man das Verschwinden der radialen Komponente des Feldes von höherer Ordnung im Gegensatz zu den beiden anderen Komponenten im Schatten. Der Zusammenhang mit der Schwärze des Schirms (Wegfall einer zirkulatorischen Energieströmung) wird in Nr. 11 erörtert werden.

Über den zu schwachen Abfall der Amplitude  $\mathfrak{E}_z$  im Schatten vgl. A, Nr. 29, im Gegensatz zur Kirchhoffschen Lösung.

Ganz analoge Formeln erhält man für parallel zur Kante polarisiertes Licht, wenn man nur  $\mathfrak{E}_z$  bzw.  $\mathfrak{H}_z$  bzw.  $\mathfrak{H}_\varphi$  mit  $\mathfrak{H}_z$  bzw.  $-\mathfrak{E}_z$  bzw.  $-\mathfrak{E}_\varphi$  vertauscht. Hieraus folgt, daß am schwarzen Schirm gebeugtes natürliches Licht unpolarisiert bleibt.

An der Schattengrenze, und zwar im Gegensatz zur Kirchhoffschen Lösung sowohl an der des physikalischen Raums  $\vartheta = -\pi$  als an der des nichtphysikalischen Raums  $\vartheta = \pi$ , hat man Stetigkeit der Gesamtfunktion

$$u^* + v_{(2)}^B = \frac{1}{2} u^0 = \frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho). \quad 1)$$

Somit:

$$(28b) \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho), \\ \mathfrak{H}_z = \frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho) \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varrho}} \cos\left(\nu t - k \varrho - \frac{\pi}{4}\right) \\ \mathfrak{H}_\varphi = -\frac{1}{2} \cos(\nu t - k \varrho). \end{cases} \quad \text{für } \vartheta = \mp \pi,$$

Die radiale Komponente verschwindet hier von geringerer Größenordnung (Existenz einer zirkulatorischen Energieströmung senkrecht zur Schattengrenze). Die beiden anderen Komponenten rühren vom einfallenden Licht her, dessen Amplitude wieder auf die Hälfte herabgesetzt ist. Man beachte die fast völlige Übereinstimmung der Kirchhoffschen Werte (26a) und der Sommerfeldschen (28b) an der Schattengrenze  $\vartheta = -\pi$  des physikalischen Raums.

## 2. In der Kante ( $\varrho \sim 0$ ).

Mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_{(2)}^B}{\partial(k \varrho)} = i \cos \vartheta v_{(2)}^B + \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \sqrt{i}} H_{1/2}^{(2)}(k \varrho)$$

1) Vgl. die Entwicklung für  $v_{(2)}^B$  unter 2.

erhält man leicht die Entwicklung:

$$v_{(2)}^B = v_{(2)}^B(0) e^{ik\rho \cos \vartheta} + 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2ik\rho}{\pi}} \left\{ 1 + \frac{ik\rho}{3} (2 \cos \vartheta - 1) + \dots \right\},$$

wo

$$v_{(2)}^B(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty db \frac{\cosh \frac{b}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{\cosh b + \cos \vartheta} = \mp \frac{1}{2} \quad \text{für } \cos \frac{\vartheta}{2} \geq 0.$$

Somit wird mit  $u^* = \cos \nu t$  oder  $= 0$ :

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= -u^* + v_{(2)}^B(0) \cos \nu t + \\ &\quad 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2k\rho}{\pi}} \cos \left( \nu t + \frac{\pi}{4} \right) + \dots, \\ \mathfrak{H}_\varrho &= - (u^* + v_{(2)}^B(0) \cos \nu t) \sin \vartheta \\ &\quad - 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \sqrt{\frac{3k\rho}{\pi}} \cos \left( \nu t + \frac{\pi}{4} \right) + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \sin \left( \nu t + \frac{\pi}{4} \right), \\ \mathfrak{H}_\varphi &= + u^* + (v_{(2)}^B(0) \cos \nu t) \cos \vartheta + \\ &\quad 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta \sqrt{\frac{2k\rho}{\pi}} \cos \left( \nu t + \frac{\pi}{4} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \sin \left( \nu t + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \right.$$

wobei  $u^* + v_{(2)}^B(0) \cos \nu t = \frac{1}{2} \cos \nu t$  ist.

Weggelassen sind Glieder mit  $(k\rho)^{3/2}$  usw. Man bemerkt, daß wieder, wie bei Kirchhoff in (27),  $\mathfrak{E}_z$  in der Kante ( $\varrho \sim 0$ ) endlich, jedoch diesmal auch stetig ist,  $\mathfrak{H}_\varrho$  und  $\mathfrak{H}_\varphi$  daselbst wie  $1/\sqrt{\varrho}$  für  $\varrho \rightarrow 0$  unendlich werden.

### 11. Die Energieströmung bei der Beugung an der schwarzen Halbebene.

Wir berechnen nunmehr die Komponenten des Poynting-schen Vektors der Energieströmung:

$$\mathfrak{S}_\varrho = -\frac{1}{c} \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_\varphi, \quad \mathfrak{S}_\varphi = +\frac{1}{c} \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_\varrho$$

für die Kirchhoffsche Lösung bzw. für die Sommerfeld-Voigtsche zweiwertige Lösung. Und zwar berechnen wir gleich die Mittelwerte



$$\bar{\mathfrak{E}}_e = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \mathfrak{E}_e, \quad \bar{\mathfrak{E}}_\varphi = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \mathfrak{E}_\varphi.$$

Es ergibt sich aus Nr. 9 bzw. Nr. 10:

**A. Kirchhoffsche Lösung.**

Große Entfernungen  $-\pi < \vartheta < \pi$  (im „Licht“):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_e &= -\cos \vartheta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cdot (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad \cos \left[ k\rho (1 + \cos \vartheta) + \frac{\pi}{4} \right] + \dots, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_\varphi &= -\sin \vartheta \\ &- \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} (1 - \cos \vartheta) \cos \left[ k\rho (1 + \cos \vartheta) + \frac{\pi}{4} \right] + \dots, \end{aligned} \right.$$

wo die 1. Terme  $-\cos \vartheta$ ,  $-\sin \vartheta$  auf den rechten Seiten vom einfallenden Lichte herrühren. Die weggelassenen Terme sind von der Ordnung  $1/\rho^{1/2}$ . An der Schattengrenze des physikalischen Raums  $\vartheta = -\pi$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_e &= \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_\varphi &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Im Schatten:  $|\vartheta| > \pi$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_e &= \left( \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)^2 + \text{Glieder mit } \frac{1}{\rho^3}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_\varphi &= \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \text{„} \quad \quad \quad \text{„} \quad \quad \quad \text{„} \end{aligned} \right.$$

An der Schattengrenze des nichtphysikalischen Raums:  
Lichtseite  $\vartheta = +\pi - 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_e &= \frac{9}{4}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{E}}_\varphi &= \frac{3}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Ebendort Schattenseite  $\vartheta = +\pi + 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{c} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{c} \mathfrak{E}_\varphi = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \end{cases}$$

Man entnimmt hieraus, daß im Schatten außerhalb der Schattengrenze die Zirkulation der Energie rund um die Kante  $\mathfrak{E}_\varphi$  in größerer Entfernung von derselben Null ist. Infolgedessen tritt keine Energie von der Schattenseite her durch den schwarzen Schirm auf dessen Lichtseite über, wie es das Voigtsche Postulat der Schwärze verlangt.

Im Licht kommt von der Beugung eine mit der Entfernung  $\rho$  oszillierende Energieströmung zu der einfallenden Strömung hinzu und zwar verhalten sich radiale ( $\mathfrak{E}_\rho$ ) und azimutale ( $\mathfrak{E}_\varphi$ ) Komponente dieses oszillierenden Teils wie bzw.  $\operatorname{tg} \vartheta/2$  und 1. (Beide verschwinden wie  $1 - \cos \vartheta$  in der Richtung  $\vartheta = 0$  des auf die Kante einfallenden Strahles.) Hieraus geht hervor, daß auch aus der Lichtseite des schwarzen Schirms in toto keine Energieströmung austritt, da die Richtung dieser wie

$$\cos \left[ k\rho(1 + \cos \vartheta) + \frac{\pi}{4} \right]$$

oszillierenden Strömung bald zum Schirm hin, bald vom Schirm weg gerichtet ist, so daß sich ihre Wirkung von der Schirmoberfläche nicht weit entfernen kann.

An der Schattengrenze des physikalischen Raums findet ein Übertritt von Energie aus dem Licht in den Schatten statt, da die azimutale Komponente  $\mathfrak{E}_\varphi$  von Null verschieden und zwar positiv ist. Da außerhalb der Schattengrenze die azimutale Komponente verschwindet, ist klar, daß die Strömungslinien der Energie nach dem Übertritt über die Schattengrenze bald die azimutale Richtung verlieren und die radiale Richtung von der Kante weg einschlagen müssen.

Was endlich die Schattengrenze des nichtphysikalischen Raums anlangt, so liegt hier bekanntlich (A, Nr. 11) eine Unstetigkeit vor. Die azimutale Strömung geht schattenseitig in den Schatten ( $\mathfrak{E}_\varphi < 0$ ), lichtseitig ins Licht ( $\mathfrak{E}_\varphi > 0$ ).

B. Sommerfeldsche Lösung.

Große Entfernungen.

Im „Licht“:  $-\pi < \vartheta < \pi$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_e &= -\cos \vartheta \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \frac{1}{\cos \vartheta/2} (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad \cos \left[ k\rho(1 + \cos \vartheta) + \frac{\pi}{4} \right] + \dots, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_\varphi &= -\sin \vartheta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cdot 2 \sin \vartheta/2 \cdot \cos \left[ k\rho(1 + \cos \vartheta) + \frac{\pi}{4} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

An der Schattengrenze des physikalischen Raums  $\vartheta = -\pi$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_e &= \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_\varphi &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Im Schatten:  $|\vartheta| > \pi$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_e &= \left( \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \frac{1}{\cos \vartheta/2} \right)^2 + \text{Glieder mit } \frac{1}{\varrho^3}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_\varphi &= \vartheta + \text{„ „ „ „} \end{aligned} \right.$$

An der Schattengrenze des nichtphysikalischen Raums  $\vartheta = +\pi$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_e &= \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{c} \bar{\mathfrak{S}}_\varphi &= -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie vorhin, hinsichtlich

1. Fehlen einer Zirkulation von Energie rund um die Kante ( $\bar{\mathfrak{S}}_\varphi = 0$ ), im Schatten und Zusammenhang mit der Schwärze des Schirms.<sup>1)</sup>

1) Das Fehlen einer Zirkulation von Energie rund um die Kante im Schatten gilt ebenso für die unendlichwertige Voigtsche Lösung, wie man leicht mit Hilfe der semikonvergenten Entwicklung für  $v^{(B)}_\infty$  bei Wiegreffe, a. a. O. (8) bestätigen kann.

2. Auftreten einer wie

$$\cos \left[ k \varrho \left( 1 + \cos \vartheta \right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

mit der Entfernung  $\varrho$  oszillierenden Energieströmung, die sich zur einfallenden superponiert und deren radiale und azimutale Komponente sich wie bzw.  $\operatorname{tg} \vartheta/2$  und 1 verhalten. Daher in toto kein Lichtaustritt aus der Lichtseite des schwarzen Schirms.

3. Übertritt von Energie an der physikalischen Schattengrenze vom Licht in den Schatten ( $\tilde{\mathfrak{E}}_{\varphi} > 0$ ).

dagegen

4. Übertritt von Energie an der nichtphysikalischen Schattengrenze vom Licht in den Schatten ( $\tilde{\mathfrak{E}}_{\varphi} < 0$ ).  
 $\tilde{\mathfrak{E}}_{\varphi}$  ist diesmal im Gegensatz zu vorhin stetig.

(Eingegangen 20. Dezember 1922.)

## 2. Über die Spitzenentladung; von *Julja Finkelstein-Cukier*.

(Hierzu Tafel V.)

§ 1. Unter Spitzenentladung versteht man die Entladung zwischen einer Spitzen- und einer Plattenelektrode, falls die Leuchterscheinung nur unmittelbar an der Spitze auftritt. Man unterscheidet eine positive Spitzenentladung, bei welcher die Spitze die positiv geladene Elektrode und eine negative, bei welcher die Spitze die negativ geladene Elektrode ist.

Warburg<sup>1)</sup> stellte für die Spitzenentladung ein empirisches Gesetz auf in der Form:  $i = aV(V - M)$ . Hierbei bedeutet  $i$  den Strom,  $V$  die Potentialdifferenz zwischen Spitze und Platte,  $M$  das Minimumpotential, d. h. das kleinste Potential, bei dem ein Spitzenstrom sich beobachten läßt,  $a$  eine Konstante, welche von der Form der Spitze, der Natur und dem Druck des Gases, sowie von der Entfernung Spitze bis Platte abhängt. Obwohl Versuche über Spitzenentladung außer in Luft auch in vielen anderen Gasen, wie  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$  und a. m. gemacht worden sind, ist die Warburgsche Formel nur für Luft als Entladungsgas geprüft worden.<sup>2)</sup> Es erschien von Interesse zu sehen, ob die einfache Warburgsche Beziehung eine für ein beliebiges Gas gültige bleibt. Wie erwähnt, lagen schon Messungen in vielen Gasen vor: die Daten waren jedoch ungenügend, um eine sichere Prüfung des Warburgschen Gesetzes durchzuführen. Aus diesem Grunde wurden Versuche in einem einfach konstituierten Gase angestellt, um mit den neu durchgeführten Messungen das Gesetz zu prüfen.

Warburg stellte sein Gesetz sowohl für positive wie für negative Entladung auf. Die Bestätigung seines Gesetzes für

1) E. Warburg, Wied. Ann. 67. S. 69. 1899.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 67. S. 69. 1899; I. Zeleny, Phys. Rev. 25 S. 305. 1907; 26. S. 129. 1908; 26. S. 448. 1908; F. Tamm, Ann. d. Phys. 6. S. 259. 1901; O. Hovda, Phys. Rev. 34. S. 25. 1912.

negative Entladung war aber nicht immer von Erfolg gekrönt: so konnte z. B. Zeleny<sup>1)</sup> das Ergebnis seiner Versuche mit einer negativ geladenen Spitze durch keine einfache Formel darstellen. Auch meine Vorversuche zeigten, daß bei einer negativen Spitzenentladung besondere Schwierigkeiten auftreten, welche spezielle Untersuchungen erfordern. Die Vorversuche bestanden in mikrophotographischen Aufnahmen der Spitze vor und nach der Entladung. Die Platten wurden mit einem Zeisschen Komparator ausgemessen. Während die positiv geladene Spitze, selbst nach einer einstündigen Entladung eine kaum merkliche Veränderung aufwies, zeigte die negative Spitze eine ganz gewaltige Veränderung, indem das äußerste Ende der Spitze gänzlich verschwunden war. Die Figg. 1 u. 2 (Taf. V) geben Bilder der Spitze vor und nach einer einstündigen Entladung, wobei das Spitzenpotential + 4000 Volt betrug.

Die Figg. 3 u. 4 (Taf. V) zeigen die Spitze unter denselben Verhältnissen, allein mit dem Unterschied, daß diesmal die Spitze negativ geladen war.

Es wurden Platinspitzen verwendet, die nach dem Verfahren von Warburg<sup>2)</sup> aus Draht von 0,17 mm Durchmesser gezogen waren.

In Anbetracht der fortwährenden Formveränderung der negativen Spitze wurde die weitere Untersuchung auf die positive Entladung beschränkt.

§ 2. Die Versuchsanordnung ist aus der Fig. 5 ersichtlich. Als Elektrizitätsquelle diente eine Wehrsensche Starkstrom-Influenzmaschine WM. Bei sehr feuchter Witterung mußte als Stromquelle ein über einen Transformator an das städtische Wechselstromnetz angeschlossener Greinacherscher Gleichrichter<sup>3)</sup> benutzt werden. Parallel zu den Polen der Maschine lag eine Wippe  $W_1$ , ein Spitzenregulator  $Sr$  zum Regulieren der Spannung<sup>4)</sup>, eine Kapazität  $C$ , bestehend aus 4 Leidener Flaschen von zusammen 0,017 Mikrofarad zum Vermeiden der Spannungsschwankungen und das Entladungsgefäß  $S. P.$  Bei

1) I. Zeleny, Phys. Rev., a. a. O.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 66. S. 652. 1898.

3) H. Greinacher, Phys. Zeitschr. 17. S. 343. 1916.

4) Es war ein vereinfachter Potentialregulator nach Gray (Ann. d. Phys. 15. S. 602. 1904) mit fester statt beweglicher Platte.

kleinen Drucken und kleinen Spannungen mußte noch ein Amylalkoholwiderstand parallel zu den Polen der Maschine

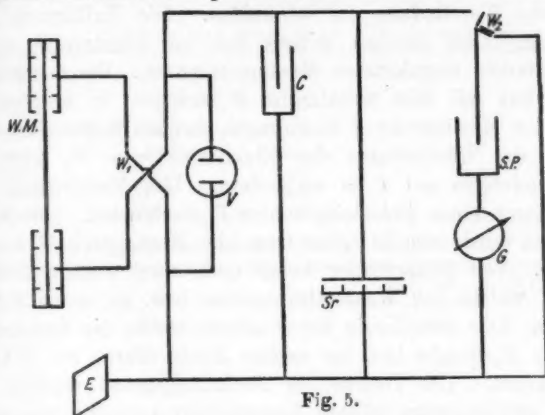


Fig. 5.

geschaltet werden. Das Entladungsgefäß wird weiter unten ausführlicher beschrieben. Der Zylinder des Entladungsgefäßes war durch ein geschuntetes Drehspulengalvanometer  $G$  zur Erde geleitet. Die Empfindlichkeit des Galvanometers betrug der Größenordnung nach  $10^{-9}$  Ampere pro Skalenteil. Als Spannungsmesser dienten zwei geeichte Braunsche Voltmeter  $V$  im Bereiche von 0 bis 10000 und 0 bis 3000 Volt. Sie waren ebenfalls zur Maschine parallel geschaltet. Der negative Pol der Maschine war stets geerdet. Um die Spitze nach Belieben erden zu können, war vor der Spitze eine Wippe  $W_2$  eingeschaltet.

Das Entladungsgefäß, welches in Fig. 6 abgebildet ist, bestand aus einem Glaszylinder  $G$  von 34 mm Durchmesser und 100 mm Höhe. In demselben war ein Messing-

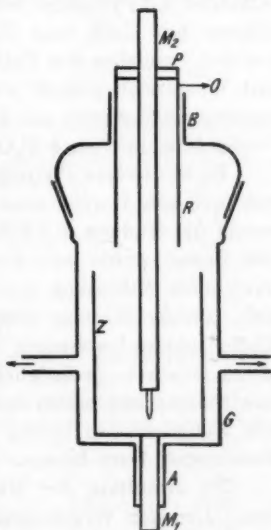


Fig. 6.

zylinder  $Z$  mit einem inneren Durchmesser von 26 mm und 50 mm Höhe eingesetzt. Der Messingzylinder hatte den Zweck, eventuelle störende Wandladung zu vermeiden. Die Zuführung zum Messingzylinder geschah mittels des im Ansatzrohr  $A$  des Glaszylinders eingekitteten Messingstabes  $M_1$ . Der obere Glaschliff war mit dem Ansatzrohr  $B$  versehen, in welches ein geerdetes Messingrohr  $R$  hineinragte, das als Schutzring dazu diente, das Überströmen der Elektrizität von  $M_2$  über die Glaswandungen auf  $Z$  zu verhindern. Das Messingrohr war oben durch einen Bernsteinpfropfen  $P$  geschlossen. Durch den letzteren wurde ein die Spitze tragender Messingstab  $M_3$  hineingeführt. Der Glaszylinder besaß noch zwei weitere Ansatzröhren, welche zur Wasserstrahlpumpe bzw. zu einem  $T$ -Rohr führten. Der eine Zweig des  $T$ -Rohres stellte die Verbindung mit der  $H_2$ -Bombe her, der andere Zweig führte zur äußeren Atmosphäre. Die Drucke im Entladungsgefäß wurden mit einem gewöhnlichen offenen Quecksilbermanometer gemessen.

§ 3. Als Gas war Wasserstoff gewählt. Dieser wurde einer Druckbombe entnommen unter Zwischenschaltung von Flaschen mit Pyrogallol, Schwefelsäure, Kalilauge sowie Trockenröhren mit  $CaCl_2$  und  $P_2O_5$ . Das Füllen mit Wasserstoff geschah, nachdem das Entladungsgefäß zwölfmal evakuiert und mit Wasserstoff gespült war. Bevor eine Entladung im Gefäß vorgenommen wurde, stand das Gefäß mehrere Tage in direkter Verbindung mit einer  $P_2O_5$ -Trockenröhre.

Es wurde eine Platinspitze verwendet, die aus einem Draht von 0,23 mm Durchmesser gezogen war. Besondere Sorgfalt wurde der Bildung des äußersten Endes der Spitze zugewendet. Die Spitze wurde auf Kegelförmigkeit des äußersten Endes unter dem Mikroskop geprüft. Im allgemeinen empfiehlt es sich, zwecks Bildung einer guten kegelförmigen Spitze, den Platindraht zu beschweren und oberhalb des Aufhängegewichtes so zu erhitzen (womöglich mit Sauerstoffgebläse), daß das Gewichtchen von selbst herunterfällt. Der Abstand der Spitze vom Zylinderboden betrug 2,5 cm. Die Spitze ragte aus dem Messingstab 1 cm heraus.

Die Resultate der Messungen, welche bei drei verschiedenen Drucken vorgenommen wurden, sind in den Tab. I, II, III und der Fig. 7 zusammengestellt.



Tabelle I.

Druck im Entl.-Gefäß red. auf 0° 711 mm Hg. Zimmer-Temp. 24° C.

 $M = 1350 \text{ V.}$ 

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^3 \text{ Amp.}$	$a \cdot 10^{13}$	$a_m \cdot 10^{13}$	$i' \cdot 10^3$
1500	3,2	1,42	1,48	3,3
2000	18,3	1,41		19,2
2500	40,9	1,42		42,5
3000	73,8	1,49		78,3
3500	116,7	1,55		111,4
4000	170,8	1,61		156,9

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

$+ V$	$b$	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^9$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^9$
1500	1880	1865	4,32	4,34
4000				
2000	1877		4,33	
3500				
2500	1818		4,40	
3000				
1500	1877		4,33	$c_m = 18,84 \cdot 10^{-19}$
3000				
2000	1877		4,33	
3500				
2500	1861		4,33	
4000				

$+ V$	$i \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^3$
1500	3,2	0,022	3,2
2000	18,3	0,021	18,3
2500	40,9	0,022	41,3
3000	73,8	0,022	73,6
3500	116,7	0,021	116,6
4000	170,8		171,7

Tabelle II.

Druck im Entl.-Gefäß red. auf 0° 533,65 mm Hg. Zimmer-Temp. 24° C.

 $M = 1225 \text{ V.}$ 

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^3$	$a \cdot 10^{13}$	$a_m \cdot 10^{13}$	$i' \cdot 10^3$
1500	6,8	1,64	1,93	7,9
2000	27,3	1,76		29,9
2500	61,6	1,93		61,5
3000	111,1	2,09		102,7
3500	177,1	2,22		153,5

Tabelle II (Fortsetzung).  
Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

+ V	b	b <sub>m</sub>	$\sqrt{c} \cdot 10^9$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^9$
1500	1156	1088	6,10	6,14
3500				
2000	1032		6,20	
3000				
1500	992		6,30	$c_m =$
2500				$3,77 \cdot 10^{-12}$
2000	1032		6,20	
3000				
2500	1229		5,90	
3500				

+ V	$i \cdot 10^8$	$A \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^8$
1500	6,8	0,031	6,9
2000	27,3	0,032	27,9
2500	61,6	0,030	61,9
3000	111,1	0,029	111,8
3500	177,1		180,5

Tabelle III.

Druck im Entl.-Gefäß red. auf 0° 311,2 mm Hg. Zimmer-Temp. 19° C.  
 $M = 975$  V.

Prüfung der Warburgschen Formel.

+ V	$i \cdot 10^8$	$a \cdot 10^{13}$	$a_m \cdot 10^{13}$	$i' \cdot 10^8$
1250	10,15	2,95	3,52	12,1
1750	44,3	3,26		47,8
2250	106,6	3,72		101,1
2750	203,0	4,16		171,9

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

+ V	b	b <sub>m</sub>	$\sqrt{c} \cdot 10^9$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^9$
1250	723	684	9,74	9,845
2750				
1750	635		10,02	
2250				
1250	729		9,70	$c_m =$
2250				$96,92 \cdot 10^{-10}$
1750	649		9,92	
2750				

Tabelle III (Fortsetzung).

$+V$	$i \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^3$
1250	10,15		10,0
1750	44,3	0,0469	44,5
2250	106,6	0,0501	106,4
2750	203 0	0,0491	202,9

In den Tabellen bedeuten:  $V$  das Potential der Spitze,  $i$  die Werte des Stromes in Ampere, welche sich aus den graphisch ausgeglichenen Kurven der Fig. 7 ergeben,  $M$  das Minimumpotential,  $a$  die Warburgsche Konstante,  $a_m$  das arithmetische Mittel aus den sämtlichen berechneten  $a$ -Werten,  $i'$  den Wert des Stromes in Ampere, berechnet nach der Warburgschen Formel. Die Werte von  $M$  wurden durch graphische Extrapolation erhalten. Es sei noch bemerkt, daß sich in der Nähe des Entladungsgefäßes stets ein schwaches Radiumpräparat befand, so daß die Differenzen zwischen Anfangspotential und Minimumpotential vollständig beseitigt waren.<sup>1)</sup> Die Bedeutung der weiteren Kolonnen der Tab. I—III wird weiter unten erläutert.

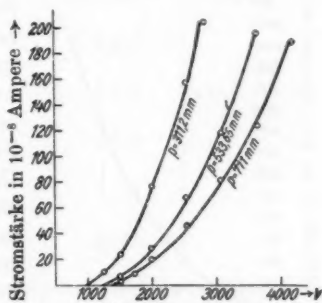


Fig. 7.

Wie aus den Tabellen ersichtlich ist, stimmen die Resultate mit der Warburgschen Formel *nicht gut* überein. Mit steigendem Potential sind die nach der Formel  $i = aV(V - M)$  berechneten Ströme stets zu klein. In der Tab. I beträgt der größte Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und dem nach der Warburgschen Formel berechneten ca. 8 Proz., in den Tab. II und III ca. 15 Proz. Die  $i'$ -Werte sind mit einer gemittelten Konstante  $a$  gerechnet und lagern sich deswegen zu beiden Seiten der experimentellen Kurve an. Am besten gewinnt man das Bild der Nichtübereinstimmung der Versuche mit der Warburgschen Formel

1) E. Warburg u. F. R. Gorton, Ann. d. Phys. 18. S. 128. 1905.

aus den Werten von  $a$ , welche systematisch mit steigendem Potential wachsen.

§ 4. Da die Versuche in Wasserstoff ganz eindeutig zeigen, daß das Warburgsche Gesetz für Wasserstoff nicht anwendbar ist, sollen zur Kontrolle die Versuche von Warburg

selbst zur Hilfe herangezogen werden. Die Spannungs- und Strombereiche der Warburgschen Versuche in Wasserstoff sind zu wenig weit, um die Prüfung seines Gesetzes für dieses Gas zu gestatten. Für Stickstoff dagegen sind seine Daten in genügender Anzahl vorhanden.<sup>1)</sup> Die Fig. 8 stellt die nach den Werten von Warburg gezeichnete Kurve dar.

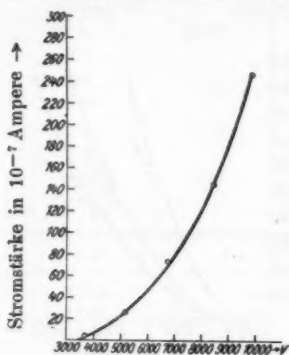


Fig. 8.

In der Tab. IV sind die Resultate der Rechnung zusammengefaßt.

Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe, wie bei den vorigen Tabellen. Wie die Tab. IV zeigt, ist die Übereinstimmung der Resultate mit der Formel  $i = aV(V - M)$  auch hier ebensowenig gut wie bei meinen eigenen Versuchen in Wasserstoff. So beträgt der größte Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und dem nach der Warburgschen Formel berechneten ca. 16 Proz.

Tabelle IV.

Versuche von Warburg in Stickstoff.  $M = 3450$  V.

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^7$	$a \cdot 10^{13}$	$a_m \cdot 10^{13}$	$i' \cdot 10^7$
4000	6,0	2,73	3,20	7,03
5000	22,0	2,84		24,8
6000	46,5	3,04		48,9
7000	78,0	3,14		79,4
8000	121,0	3,32		116,3
9000	178,0	3,56		159,6
10000	245,0	3,74		209,3

1) E. Warburg, Sitzungsber. Berliner Akad. S. 1062. 1902.

Tabelle IV (Fortsetzung).

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

+ V	b	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^9$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^9$
4000	3021	3130	4,700	$c_m =$ $21,62 \cdot 10^{-18}$
10000				
5000	2979		4,725	
9000				
6000	3596		4,450	
8000				
4050	3122		4,633	
7000				
5000	3137		4,633	
8000				
6000	3216		4,633	
9000				
7000	2839		4,767	
10000				

+ V	$i \cdot 10^7$	$A \cdot 10^{-3}$	$i'' \cdot 10^7$
4000	6,0	0,0047	6,0
5000	22,0	0,0050	21,9
6000	46,5	0,0042	45,96
7000	78,0	0,0047	78,76
8000	121,0	0,0050	121,9
9000	178,0	0,0046	176,6
10000	245,0		244,2

§ 5. Gestützt auf diese Tatsachen wurde versucht, teils auf Grund des Warburgschen Gesetzes, teils auf Grund sehr vereinfachter theoretischer Überlegungen einen neuen funktionalen Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der Spannung im Falle der positiven Spitzenentladung zu finden. Den Überlegungen wurde die Starksche Ansicht<sup>1)</sup> zugrunde gelegt, welche im wesentlichen folgenden Inhalt hat.

1. Die Spitzenentladung kommt durch eine an der Spitze stattfindende zweifache Grenzionisation zustande, oder mit anderen Worten: von der dicht an der Oberfläche der Spitze sich befindenden Schicht, welche ich im folgenden Ionisierungsschicht I nennen werde, treten im Falle der positiven Spitzen-

1) J. Stark, „Die Elektrizität in Gasen“. Leipzig, bei Joh. Ambr. Barth 1902.

entladung positive Ionen heraus. Erlangen diese in dem elektrischen Felde an der Spitze genügende kinetische Energie, so werden sie die Moleküle des Gases durch Stoß ionisieren, was in einer Schicht geschieht, die durch Ionisierungsschicht II bezeichnet werden soll. Aus dieser zweiten Ionisierungsschicht treten in Richtung nach der Spitze hin Elektronen aus und rufen in der ersten Ionisierungsschicht Stoßionisation hervor, um wieder die für den ersten Vorgang nötigen positiven Ionen zu liefern und so fort.

2. Die positiven Ionen, welche in der zweiten Ionisierungsschicht gebildet werden, bewegen sich zur Kathode hin unter der Wirkung des vorhandenen Feldes, ohne eine weitere Stoßionisation hervorzurufen.

Die zweite Ionisierungsschicht ist hiernach die Hauptquelle der positiven Ionen, welche den Strom liefern. Es wird versucht, die Anzahl der Ionen  $n$ , die bei einer gegebenen Potentialdifferenz  $V$  zwischen Spitze und Platte pro Zeiteinheit aus der zweiten Ionisierungsschicht heraustreten, zu berechnen. Sei  $\sigma$  die Anzahl der positiven Ionen, welche pro Zeiteinheit und Raumeinheit des Ionisierungsvolumens erzeugt werden. Dann ist

$$(1) \quad n = \sigma W,$$

wo  $W$  das Volumen der zweiten Ionisierungsschicht bedeutet. Um  $W$  zu berechnen nehmen wir den Fall einer vollkommen kegelförmigen Spitze an. Die zweite Ionisierungsschicht wird in diesem Falle angenähert die Form eines Kegels haben. Es sei die Dicke der zweiten Ionisierungsschicht in erster Annäherung konstant, so daß es bei der Berechnung des Volumens  $W$  in der Hauptsache nur auf die Oberfläche des Ionisierungskegels ankommt. Infolge der variablen Oberflächendichte  $\rho$  der Elektrizität auf einem Kegel wird auch die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke  $\mathcal{E}$  von Punkt zu Punkt an der Spitzenoberfläche verschieden sein. Bezeichnet man mit  $l$  den Abstand irgendeines Punktes der Kegelspitze von ihrem äußersten Ende und nimmt man an, daß in dem kleinen zur Verwendung kommenden Bereich<sup>1)</sup>

1) Die Spitze selbst und ihre allernächste Umgebung schließen wir aus: 1. weil theoretisch die elektrische Feldstärke an der Spitze

$\rho$  linear mit wachsendem  $l$  abnimmt, so wird

$$(2) \quad \mathcal{E} = 4\pi\rho = 4\pi(a_0 - a_1 l)$$

sein, wo  $a_0$  und  $a_1$  konstante positive Größen sind. Die unter diesen Annahmen vorhandene Feldverteilung an der Oberfläche der Spitze ist in Fig. 9 in einem Achsenschnitt dargestellt.

Die Figur zeigt die Feldverteilung an der Spitze  $KSK'$  bei zwei verschiedenen Spannungen  $V$  und  $V'$ , wo  $V' > V$  ist. In dem Punkte  $P$  der Kegeloberfläche herrscht bei dem angelegten Potential  $V$  die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$ , bei  $V'$  dagegen  $\mathcal{E}'$ .  $SA$ ,  $SA'$  geben die Größen der Feldstärke in nächster Nähe des äußersten Spitzenendes an. In den Punkten  $B$ ,  $B'$  wären die Feldstärken bei unseren einfachen Annahmen gleich 0. Die von jedem Punkte der Geraden  $BA$  bzw.  $B'A'$  auf die Kegelerzeugende  $SK'$  gefällten Lote geben die Größe der Feldstärke in jedem Punkte des Kegels an.  $P_i$  und  $P'_i$  sind für Spannungen  $V$  und  $V'$  ausgezeichnete Punkte, deren Bedeutung weiter unten erläutert wird.

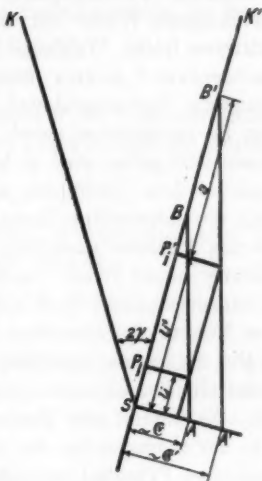


Fig. 9.

Damit ein Ion ein Molekül durch Stoß ionisiert, muß es (unter der vereinfachten Annahme vollkommen unelastischer Zusammenstöße) auf seiner freien Weglänge eine gewisse minimale kinetische Energie erlangen. Es muß die Beziehung gelten:

$$(3) \quad \mathcal{E}_i \lambda_i \geq V_i,$$

wo  $V_i$  die Ionisierungsspannung,  $\lambda_i$  die mittlere freie Weglänge und  $\mathcal{E}_i$  die auf der mittleren freien Weglänge herrschende mittlere elektrische Feldstärke bedeutet. Einfachheitshalber

unendlich groß wird und 2. weil sich experimentell zeigt, daß beim Minimumpotential die äußerste Spitze sowie ihre allernächste Umgebung schon mit den Ionisierungsschichten überzogen ist.

wird angenommen, daß auf der mittleren freien Weglänge eines aus der ersten Ionisierungsschicht austretenden Ions die elektrische Feldstärke konstant ist und denselben Wert wie im Ausgangspunkt auf der Oberfläche des Kegels besitzt. Infolge der dargestellten Feldverteilung entsprechen verschiedenen Austrittspunkten der ersten Ionisierungsschicht verschiedene Werte der durch die positiven Ionen auf ihrer mittleren freien Weglänge erlangten kinetischen Energie. Mit wachsendem  $l$  nimmt diese Energie ab, so daß jedem bestimmten Spitzenpotential  $V$  ein bestimmter Punkt  $P_i$  (vgl. Fig. 9) entsprechen wird, für welchen die Beziehung (3) mindestens gelten wird, d. h. ein aus dem Punkt  $P_i$  austretendes positives Ion durchläuft auf seiner freien Weglänge gerade noch die notwendige Ionisierungsspannung. Alle Ionen aber, die aus Punkten austreten, deren  $l > l_i$  ist, werden nichts zur Bildung neuer Ionen beitragen, d. h. die erste und zweite Ionisierungsschicht wird sich für die Spannung  $V$  nur bis zu dem Punkte  $P_i$  erstrecken. Legen wir eine Spannung  $V' > V$  an die Spitze an, so rückt der Punkt  $P_i$  bis zum Punkte  $P'_i$ , so daß die Beziehung (3) jetzt auch noch bis zu dem Punkte  $P'_i$  gilt. Es kommt nun darauf an, eine Beziehung zwischen  $L_i$ , d. h. der Erzeugenden des zweiten Ionisierungskegels und dem angelegten Potential zu finden. Macht man die Annahme, daß die zweite und die erste Ionisierungsschicht konaxiale Kegel darstellen, so wird die Erzeugende  $L_i$  der zweiten Ionisierungsschicht sich von der Erzeugenden  $l_i$  der ersten Ionisierungsschicht um eine additive Konstante unterscheiden, so daß man schreiben kann:

$$(4) \quad L_i = l_i + \text{konst.}$$

Da die elektrische Feldstärke in einem gegebenen Punkt des Kegels proportional der angelegten Spannung  $V$  ist, so folgt (Fig. 9) aus den Dreiecken  $SAB$  und  $SA'B'$ :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} = \frac{V}{V'} = \frac{SP_i + P_iB}{SP'_i + P'_iB'} = \frac{l_i + a}{l'_i + a}.$$

Somit ist

$$(5) \quad l_i = cV - a,$$

wo  $c$  und  $a = \text{konst.}$  und nach (4)

$$(6) \quad L_i = C_1 V + b),$$



wo  $C_1$  und  $b$  konstante Werte bedeuten. Der dazu gehörige Radius  $R_i$  der Kegelbasis des zweiten Ionisierungskegels ist somit:

$$(8a) \quad R_i = C_2(V + b),$$

wo  $C_2 = \text{konstant}$ .

Die Oberfläche  $O$  der zweiten Ionisierungsschicht ist dann:

$$(7) \quad O = \pi L_i R_i = C_3(V + b)^2,$$

wobei  $C_3$  und  $b = \text{konstant}$ .

Wir erhalten somit für die Anzahl  $n$  der positiven Ionen, die pro Zeiteinheit aus dem zweiten Ionisierungskegel heraus-treten:

$$(8) \quad n = \sigma C_4(V + b)^2,$$

wobei  $C_4$  und  $b$  konstante Werte sind. Weiter unten wird die Beziehung (5) experimentell bestätigt werden.

Der Spitzenstrom ergibt sich daher zu:

$$i = ne = \sigma C_4(V + b)^2 e,$$

wobei  $e$  den Wert des elektrischen Elementarquantums dar-stellt. Setzt man in Anlehnung an die Warburgsche Formel die Ionendichte  $\sigma$  proportional  $(V - M)$ , also  $\sigma = C_5(V - M)$ , so wird der Spitzenstrom:

$$i = C_4 \cdot C_5 \cdot e(V - M)(V + b)^2$$

oder, wenn für  $C_4 \cdot C_5 \cdot e$  die neue Konstante  $C$  gesetzt wird:

$$(9) \quad i = C(V - M)(V + b)^2.$$

Hervorgehoben sei, daß der funktionelle Zusammenhang zwischen  $i$  und  $V$ , wie er durch die Beziehung (9) ausgedrückt wird, nicht im wirklichen Sinne theoretisch abgeleitet wurde. Die Formel stellt mehr eine empirische Beziehung dar, bei der man sich die beiden Faktoren  $(V - M)$  und  $(V + b)^2$  theoretisch plausibel machen kann.

§ 6. Die Formel (9) läßt sich in verschiedener Weise prüfen. Erstens wurden die Resultate der früheren, in den Tab. I, II, III dargestellten Messungen der Spitzenentladung nach der Formel (9) rechnerisch dargestellt. Es soll hier nochmals bemerkt werden, daß in jenen Versuchen ein be-sonderes Gewicht auf die Herstellung einer gut ausgebildeten kegelförmigen Spitze gelegt wurde. Die Berechnung des

Stromes  $i''$  nach der Formel (9) geschah folgendermaßen: Für  $M$  wurde, wie bei der Prüfung der Warburgschen Formel, derjenige Wert genommen, der sich durch graphische Extrapolation der Kurven der Fig. 7 für  $i = 0$  ergab. Zur Bestimmung von  $b$  und  $C$  sind zwei Gleichungen notwendig; man bildet zu diesem Zwecke verschiedene Kombinationen gemessener Wertepaare; aus jeder solchen Kombination von zwei Gleichungen berechnet sich  $b$  und  $C$ . In den Tab. I, II, III ist unter  $b_m$  bzw.  $C_m$  das arithmetische Mittel der  $b$ - bzw.  $C$ -Werte angegeben. Unter  $i''$  sind dann die nach Formel (9) vermittelt  $b_m$  und  $C_m$  berechneten Spitzenstromstärken verzeichnet. Der größte Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und dem nach Formel (9) berechneten erreicht in der Tab. I den Wert von ca. 1 Proz., in der Tab. II ca. 2 Proz., in der Tab. III 1,5 Proz. Diese Unterschiede liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, so daß die Formel (9) als analytischer Ausdruck der in Fig. 7 dargestellten Messungen gelten kann.

Die zweite Methode zur Prüfung der Formel (9) besteht in folgendem. Stellt man den Ausdruck auf:

$$\Delta = \sqrt{\frac{i_{V+\Delta V}}{V+\Delta V-M}} - \sqrt{\frac{i_V}{V-M}},$$

wobei  $i_{V+\Delta V}$  bzw.  $i_V$  den Spitzenstrom für das Spitzenpotential  $(V+\Delta V)$  bzw.  $V$  bedeutet, so ergibt sich, falls man nach Gleichung (9) diese  $i$ -Werte einsetzt [also  $i_V = C(V-M)(V+b)^2$  und  $i_{V+\Delta V} = C(V+\Delta V-M)(V+\Delta V+b)^2$ ],

$$\Delta = \sqrt{C} \cdot \Delta V.$$

Berechnet man daher  $\Delta$  für eine Reihe äquidistanter Spannungen, d. h. für  $\Delta V = \text{konst.}$ , so muß  $\Delta$ , im Falle der Gültigkeit der Beziehung (9), konstant sein. Die Tabellen zeigen, daß die so berechneten  $\Delta$  diese Forderung bestens erfüllen.

§ 7. Nach Gleichung (5) des § 5 sollte die Erzeugende der ersten Ionisierungsschicht, d. h. des ersten Ionisierungskegels, linear mit dem Spitzenpotential ansteigen. Um zu sehen, ob dieses tatsächlich der Fall ist, wurden Mikrophotographien der Spitzenentladung bei verschiedenen angelegten Spannungen

aufgenommen. Die hierzu verwendete Anordnung ist in Fig. 10 skizziert.

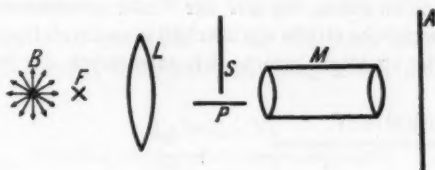


Fig. 10.

Die Lichtquelle *B* dient zur Beleuchtung des Quarzfadens *F*, den man sich senkrecht zur Zeichnungsebene verlaufend denken muß. Die Linse *L* entwirft in der Ebene der Spitze *S*, welche sich gegenüber einer geerdeten Platte *P* befindet, ein reelles, verkleinertes Bild des Quarzfadens. Das Mikroskop *M* vergrößert *S* und das reelle Bild des Quarzfadens auf das 40fache. In *A* befindet sich die photographische Platte. Der Quarzfaden wurde so justiert, daß sein Bild die Spitze gerade tangierte. Dies wurde vor und nach jeder Aufnahme auf der Mattscheibe des photographischen Apparates kontrolliert. Zuerst legte man eine bestimmte Spannung an die Spitze an und ließ das Spitzenlicht während 10 Minuten auf die photographische Platte wirken. Dann wurde die Spitze geerdet und der Quarzfaden mittels der Lampe *B* während 5 Sekunden beleuchtet. Man erhielt so auf der photographischen Platte das Bild der Spitze, der Lichthaut, d. h. der beiden Ionisierungsschichten und des Quarzfadens. Das auf der Platte enthaltene Bild ist schematisch in der Fig. 11 gezeichnet.



Fig. 11.

Die horizontale Gerade *F* bedeutet den Quarzfaden, das schraffierte Stück, die die Spitze bedeckende Lichthaut. *d* ist der Abstand vom Quarzfaden bis zum oberen Rande der Lichthaut. Es ist  $d = l \cos \gamma$ , wo *l* die Erzeugende der ersten Ionisierungsschicht und  $\gamma$  den halben Kegelwinkel der Spitze bedeutet. Die Ausmessung von *d* erfolgte mittels eines Zeiss'schen Komparators. Die Resultate der Messungen (aus sechs photographischen Aufnahmen bei sechs verschiedenen Spitzen-

potentialen) sind in der Tab. V enthalten und in der Fig. 12 graphisch dargestellt.

Die Zahlen geben das auf der Platte gemessene  $d$  in Zentimeter, die wirkliche Größe von  $d$  erhält man durch Division mit 40. Wie die Fig. 12 zeigt, lagern sich tatsächlich die Werte von  $d$

Tabelle V.

+ $V$	$d$
3055	0,771
3962	0,970
4520	1,092
4960	1,226
5490	1,348
5860	1,513

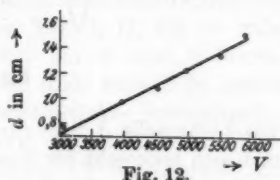


Fig. 12.

beiderseits einer geraden Linie an, wie es die Theorie verlangt. Die Messung von  $d$  wird erschwert durch die stetige Abnahme der Lichtintensität am Rande der Lichthaut. Die Photographien wurden in freier Luft aufgenommen. Der Durchmesser des verwendeten Platindrahtes, aus dem die Spitze gezogen war, betrug 0,17 mm. Der Abstand der Spitze von der geerdeten Platte war ca. 0,5 cm.

§ 8. Wenn wirklich nach den Überlegungen, die zur Aufstellung der Beziehung (5) und (6) sowie zu der endgültigen Formel (9) geführt haben, die Oberflächengröße der Ionisierungsschichten einen so bestimmenden Einfluß auf die Intensität des Spitzenstromes ausübt, dann sollte es möglich sein, den Verlauf der Charakteristik dadurch zu ändern, daß man die weitere Ausdehnung der Ionisierungsschichten an der Spitze mit wachsendem Potential verhindert. Dieses kann man experimentell dadurch erreichen, daß man eine Spitze verwendet, die nur ganz wenig aus einem umschmolzenen Glasrohr herausragt. Legt man an eine solche Spitze wachsende Spannung an, so werden sich zuerst die Ionisierungsschichten ungestört ausbilden können, bis von einem bestimmten Potential an das umgebende Glasrohr ein weiteres Wachsen der Schichten unmöglich macht.

Versuche mit einer solchen, allerdings nicht kegelförmigen, glasgeschützten Spitze wurden in freier Luft ausgeführt. Die

Spitze war aus einem Platindraht von etwa 0,05 mm Durchmesser gezogen. Die Resultate sind in der Tab. VI und Fig. 13 zusammengestellt.

$\Delta$  bedeutet in der Tab. VI die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stromstärken. Man sieht, daß bis etwa

Tabelle VI.

$+V$	$i \cdot 10^5$	$\Delta$
2500	44,1	93,1
3000	137,2	108,8
3500	246,0	112,0
4000	358,0	147,0
4500	505,0	167,0
5000	672,0	203,0
5500	875,0	200,0
6000	1075,0	230,0
6500	1305,0	204,0
7000	1509,0	

5000 Volt die Charakteristik die gewöhnliche Form besitzt, bei höheren Spannungen aber ist  $\Delta$  konstant, d. h. jetzt ist der Spitzenstrom eine lineare Funktion des Potentials. Extrapoliert man die Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte  $P$  mit der Abszissenachse,

so ist die Abszisse von  $P$  größer als  $M$ . Man ersieht hieraus, daß tatsächlich dann, wenn die Ionisierungsschichten keinen Platz haben, um sich auszudehnen, die Charakteristik des Spitzenstromes eine total andere wird.

§ 9. Um zu zeigen, daß die Formel (9) nur für gut ausgebildete kegelförmige Spitzen gültig ist, wurden Versuche mit einer Spitze angestellt, durch welche während längerer Zeit negativer Spitzenstrom hindurchgegangen war. Während die Spitze vor der negativen Entladung unter dem Mikroskop als kegelförmig mit einem ausgezeichnet ausgebildeten äußersten

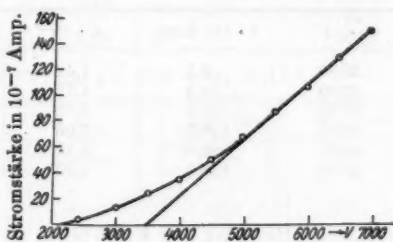


Fig. 13.

Ende erschien, zeigte sie sich nach der Entladung stark abgestumpft. Die Fig. 14 stellt schematisch bei vielfacher Vergrößerung diese Spitze dar, sie wurde bei den folgenden Versuchen gebraucht.



Fig. 14.

Die Versuchsanordnung war genau dieselbe wie bei den in § 3 beschriebenen Versuchen. Als Gas wurde ebenfalls Wasserstoff verwendet. Der Durchmesser des verwendeten Platindrahtes betrug 0,23 mm, der Abstand vom Zylinderboden 1,5 cm.

Die Resultate der Messungen sind in den Tab. VII, VIII, IX, X, XI und Fig. 15 enthalten.

Tabelle VII.

Druck im Entl.-Gefäß auf 0° red. 709 mm Hg. Zimmer-Temp. 14,5°.

$M = 1700 V$ .

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^7 \text{ Amp.}$	$a \cdot 10^{12}$	$a_m \cdot 10^{12}$	$i' \cdot 10^7$
2000	8,5	1,42		11,5
2500	34,5	1,73		38,4
3000	76,0	1,95	1,915	74,5
3500	129,5	2,06		120,5
4000	196,0	2,13		176,0
4500	278,5	2,20		242,0

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

$+ V$	$b$	$b_m$	$\sqrt{C} \cdot 10^8$	$\sqrt{C_m} \cdot 10^8$
2000	862	1216	1,85	1,79
4500				
2500	1230		1,76	
4000				
3000	1495		1,70	
3500				
2000	518		2,12	
3500				
2500	1230		1,76	
4000				
3000	1960		1,54	
4500				

$C_m =$   
 $3,21 \cdot 10^{-16}$

Tabelle VII (Fortsetzung).

$+ V$	$i \cdot 10^7 \text{ A.}$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7 \text{ A.}$
2000	8,5	0,125	10,0
2500	34,5	0,107	35,5
3000	76,0	0,085	74,5
3500	129,5	0,072	129,0
4000	196,0	0,074	201,0
4500	278,5		294,0

Tabelle VIII.

Druck im Entl.-Gefäß. 535,7.  $M = 1475 \text{ V.}$ 

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^7$	$a \cdot 10^{12}$	$a_m \cdot 10^{12}$	$i' \cdot 10^7 \text{ A.}$
1750	10,5	2,18		12,55
2000	23,0	2,19		27,8
2250	40,5	2,32	2,6	45,4
2500	65,0	2,54		61,6
2750	96,0	2,73		91,2
3000	130,0	2,84		119,0
3250	165,0	2,86		150,0
3500	203,0	2,87		184,0
3750	242,5	2,84		222,2

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

$+ V$	$b$	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^3$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^3$
1750	1259	1059	2,05	2,27
3750				
2000	906		2,27	
3500				$c_m =$
2250	759		2,40	$5,17 \cdot 10^{-16}$
3250				
2500	630		2,54	
3000				
1750	745		2,48	
2750				
2000	533		2,61	
3000				
2250	759		2,40	
3250				
2500	1339		2,07	
3500				
2750	2600		1,62	
3750				

Tabelle VIII (Fortsetzung).

$+V$	$i \cdot 10^7 \text{ A.}$	$A \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7 \text{ A.}$
1750	10,5	0,042	11,2
2000	23,0	0,041	25,5
2250	40,5	0,073	43,8
2500	65,0	0,072	67,4
2750	96,0	0,055	96,0
3000	130,0	0,040	130,2
3250	165,0	0,040	171,0
3500	203,0	0,027	217,0
3750	242,5		272,0

Tabelle IX.

Druck im Entl.-Gefäß red. auf  $0^\circ$  252,3 mm Hg. Zimmer-Temp.  $15,8^\circ \text{ C.}$  $M = 990 \text{ V.}$ 

Prüfung der Warburgschen Formel.

$+V$	$i \cdot 10^7$	$a \cdot 10^{13}$	$a_m \cdot 10^{13}$	$i' \cdot 10^7 \text{ A.}$
1250	17,5	5,38	6,55	21,2
1500	44,5	5,80		49,9
1750	81,0	6,10		87,2
2000	131,5	6,52		132,5
2250	192,5	6,78		186,0
2500	276,0	7,30		247,0
2750	385,0	7,94		317,0

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

$+V$	$b$	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^3$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^3$
1250	627	707	4,36	4,21
2750				
1500	730		4,18	
2500				
1750	845		3,98	
2250				
1250	672		4,26	$c_m = 17,8 \cdot 10^{-16}$
2000				
1500	832		4,00	
2250				
1750	695		4,22	
2500				
2000	550		4,46	
2750				



Tabelle IX (Fortsetzung).

+ V	$i \cdot 10^7 \text{ A.}$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7 \text{ A.}$
1250	17,3	0,112	17,75
1500	44,5	0,101	44,2
1750	81,0	0,107	81,8
2000	181,5	0,092	182,0
2250	192,5	0,118	198,5
2500	276,0	0,125	277,0
2750	385,0		374,0

Tabelle X.

Druck im Entl.-Gefäß auf 0° red. 94,7 mm Hg. Zimmer-Temp. 15,5° C.

 $M = 720 \text{ V.}$ 

Prüfung der Warburgschen Formel.

+ V	$i \cdot 10^7 \text{ Amp.}$	$a \cdot 10^{11}$	$a_m \cdot 10^{11}$	$i' \cdot 10^7 \text{ Amp.}$
800	9,5	1,49	1,78	11,4
1000	44,0	1,57		49,8
1200	101,5	1,76		102,5
1400	182,0	1,91		170,0
1600	305,0	2,16		251,0

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

+ V	$b$	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^3$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^3$
800	332	300	9,62	9,67
1600				
1000	283		9,74	
1400				
800	389		9,00	$c_m =$
1200				$93,5 \cdot 10^{-16}$
1000	283		9,74	
1400				
1200	214		10,25	
1600				

+ V	$i \cdot 10^7$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7$
800	9,5	0,16	9,05
1000	44,0	0,20	44,3
1200	101,5	0,19	101,2
1400	182,0	0,22	184,0
1600	305,0		298,0

Tabelle XI.

Druck im Entl.-Gefäß auf 0° red. 24,7 mm Hg. Zimmer-Temp. 13,2° C.  
 $M = 540 \text{ V}$ .

## Prüfung der Warburgschen Formel.

$+ V$	$i \cdot 10^7$	$a \cdot 10^{11}$	$a_m \cdot 10^{11}$	$i' \cdot 10^7 \text{ Amp.}$
600	21,0	5,83	8,125	29,2
650	46,5	6,50		58,2
700	79,0	7,04		90,9
750	127,0	8,06		128,0
800	207,0	9,97		169,0
850	300,0	11,35		214,0

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

$+V$	$b$	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^7$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^7$
600	— 220	— 234	4,92	4,965
850				
650	— 251		5,14	$c_m =$ $24,8 \cdot 10^{-14}$
800				
700	— 237		4,80	
750				
600	— 125		3,93	
750				
650	— 251		5,14	
800				
700	— 321		5,86	
850				

$+ V$	$i \cdot 10^7$	$\Delta \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7 \text{ A.}$
600	21,0	0,18	19,9
650	46,5	0,17	47,5
700	79,0	0,24	86,1
750	127,0	0,36	138,5
800	207,0	0,28	207,0
850	300,0		292,0

Vergleicht man die Tab. I, welche Messungen bei ungefähr demselben Drucke, aber bei *kegelförmiger* Spitze enthält, mit der Tab. VII, so ersieht man, daß, während in der Tab. I der größte Unterschied zwischen der nach Formel (9) berechneten und der experimentellen Stromstärke nur ca. 1 Proz. ausmacht, die entsprechende Größe in der Tab. VII ca. 18 Proz. beträgt. Die Ungültigkeit der Formel (9) zeigt sich noch besser bei Betrachtung der Größe  $\Delta$ . Diese Werte sollten

nach Formel (9) konstant sein. In der Tab. VII zeigen sie dagegen einen systematisch abnehmenden Gang. Aus den entsprechenden Tab. II und VIII ergibt sich dasselbe. Während in der Tab. II der größte Unterschied zwischen der nach Formel (9) berechneten und der beobachteten Stromstärke ca. 2 Proz. beträgt, ist er in der Tab. VIII etwa 11 Proz.

Bei niedrigeren Drucken (kleiner als etwa 300 mm Hg) wird das Verhalten aber anders. Denn vergleicht man die entsprechenden Tab. III und IX, so erhält man maximal für die Differenzen ( $i'' - i$ ) in der Tab. III den Wert ca. 1,5 Proz., in der Tab. IX den Wert von nur ca. 3 Proz. Die Tab. X zeigt ebenfalls analog der Tab. IX eine gute Übereinstimmung

zwischen den experimentellen Werten der Stromstärke und den nach Formel (9) berechneten. Man kann dies folgendermaßen deuten: nimmt man als sehr wahrscheinlich an, daß die Oberflächen der Ionisierungsschichten für  $V = M$  mit abnehmendem Druck wachsen, so werden für eine Spitze von der Form, wie sie in Fig. 14 dargestellt ist, bei einem gewissen niederen Druck die Ionisierungsschichten bei eintretender Entladung das ganze untere Ende der Spitze bedecken. Da die Seitenfläche dieser Spitze (Fig. 14) einem Kegel angehört, so wird die Ionisierungsschicht bei steigender Spannung der Beziehung (7) folgen und die Formel (9) wird ihre Gültigkeit wieder behalten.

Bei den Messungen der Tab. XI, die bei dem kleinsten Druck (25 mm Hg) angestellt wurden, erkennt man einen wachsenden systematischen Gang der Größe  $\Delta$ . Bei so kleinen Drucken scheint die Gültigkeit der Formel (9) aufzuhören, wahrscheinlich deshalb, weil nun nicht mehr die Voraussetzungen erfüllt sind, die zu ihrer Ableitung geführt haben. In den Tab. VII, VIII, IX, X und XI ist auch die Prüfung

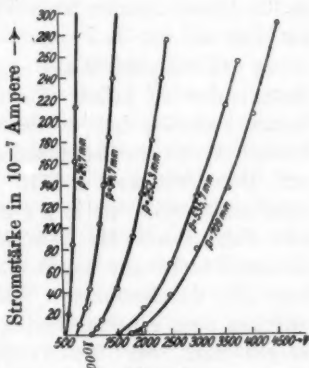


Fig. 15.

der Warburgschen Formel durchgeführt. Wie die Rechnungen zeigen, kann man die Warburgsche Formel auf für diesen Fall *nicht* anwenden. So beträgt der größte Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und dem nach der Warburgschen Formel berechneten in der Tab. VII ca. 30 Proz. In den Tab. VIII, IX und X ca. 20 Proz., in der Tab. XI ca. 35 Proz.

§ 10. Obwohl Warburg nichts über die mikroskopische Gestalt der zu seinen Versuchen in Stickstoff verwendeten Spitze bemerkt, lag es doch nahe zu prüfen, ob die neue Formel (9) für die Resultate seiner alten Messungen in Stickstoff ihre Gültigkeit behält. Diese Prüfung erschien um so mehr angebracht, als in § 4 gezeigt wurde, daß die Warburgsche Formel auf die Resultate seiner eigenen Messungen in Stickstoff nicht gut anwendbar ist. Die Rechnung ist in der Tab. IV durchgeführt. Während der größte Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und demjenigen nach der Warburgschen Formel berechneten ca. 17 Proz. beträgt, ist der Unterschied zwischen dem experimentellen Wert der Stromstärke und dem nach Formel (9) berechneten nur ca. 1,5 Proz.

§ 11. Obwohl die Prüfung der Formel (9) nach den verschiedenen beschriebenen Methoden stets zu dem Resultat geführt hat, daß ihre Gültigkeit erwiesen wurde, so besteht trotzdem die Tatsache, daß Warburg, Zeleny, Tamm und andere (a. a. O.) die Warburgsche Formel erfolgreich auf ihre Messungen anwenden konnten. Es gibt allerdings auch Forscher, welche für die Spitzenentladung einen anderen funktionellen Zusammenhang als Warburg fanden. Sieveking<sup>1)</sup> findet z. B., daß die Stromstärke bis zu einer gewissen Spannung proportional der ersten Potenz der Spannung wächst; Töpler<sup>2)</sup> teilt die ganze Spitzenentladung in drei Bereiche: im ersten Bereich der kleinen Stromstärken gilt eine lineare Beziehung zwischen Stromstärke und Spannung; im zweiten Bereiche der mittleren Stromstärken gilt die Warburgsche Formel, im dritten Bereiche der großen Stromstärken wächst der

1) H. Sieveking, Ann. d. Phys. 1. S. 299. 1900.

2) M. Töpler, Ann. d. Phys. 18. S. 757. 1905.

Strom mit der dritten Potenz der Spannung. Töpler bemerkt, daß der Übergang von einem Bereiche zum anderen von der Schärfe der Spitze abhängt und kontinuierlich verläuft.

Diese Diskrepanz zwischen den Resultaten der verschiedenen Forscher läßt sich wahrscheinlich darauf zurückführen, daß erstens die Charakteristik der Spitzenentladung von der mikroskopischen Gestalt der Spitze abhängt, und daß zweitens die Versuche bei *ruhender Luft* in geschlossenen Gefäßen nicht eindeutig sind. Denn durch die beschriebenen Versuche, einerseits mit einer kegelförmigen Spitze, deren äußerstes Ende in eine scharfe Spitze auslief, und andererseits mit einer Spitze, deren äußerstes Ende abgestumpft war, ist gezeigt, daß der funktionelle Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung wirklich von der mikroskopischen Gestalt der Spitze abhängt. Es sei bemerkt, daß schon Hovda<sup>1)</sup> eine solche Abhängigkeit vermutete. Aber auch der zweite angegebene Grund für die Diskrepanzen, die Nichteindeutigkeit der Versuche in ruhender Luft, läßt sich experimentell stützen. Es wurden dazu Versuche in ruhender Luft ausgeführt, wobei dieselbe Versuchsanordnung angewendet war, wie bei den Versuchen mit Wasserstoff. Die Luft wurde durch Trockenröhren mit  $\text{CaCl}_2$  und  $\text{P}_2\text{O}_5$  zugeleitet. Das Entladungsgefäß stand in direkter Verbindung mit einem Trockenreservoir. Eine Spitze an einem Platindraht von 0,23 mm Durchmesser im Abstände von 1,5 cm vom Zylinderboden kam zur Benutzung. Die Messungen sind dabei folgendermaßen angestellt worden: es wurde zuerst Luft durch das Entladungsgefäß hindurchgesaugt und *während des Hindurchsaugens* die Stromstärke gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in der Fig. 16 durch Kreuze angedeutet.

Die Stromstärke wurde bei wachsender Spannung vom Minimumpotential an bis zu 8000 Volt und dann bei abnehmender Spannung zurück bis zum Minimumpotential gemessen. Das gleiche Verfahren wurde wiederholt, wodurch man vier Kurvenäste erhielt. Der 2., 3. und 4. Kurvenast fielen mit dem ersten zusammen. Hierauf wurde in frischer, aber *ruhender Luft* gemessen, wobei die sonstigen Verhältnisse dieselben blieben, wie bei Aufnahme der Stromstärke in hindurch-

1) O. Hovda, a. a. O.

strömender Luft. Diese Messungen sind in der Fig. 16 durch volle Kreise angedeutet. Wiederum wurden wie oben vier



Fig. 16.

Äste aufgenommen, wobei der 2., 3. und 4. Ast mit dem ersten zusammenfielen. Nachdem das Gas ca. 12 Stunden in dem Entladungsgefäß geruht hatte, fand eine Wiederholung der Messung mit 7 Kurvenästen statt, wobei aber jetzt der 4., 5., 6. und 7. Kurvenast erst mit dem dritten zusammenfielen. Alle diese Äste wurden direkt nacheinander aufgenommen. Die Resultate dieser Versuche sind in Fig. 16 mit hohlen Kreisen bezeichnet; die Nummern der Äste sind in der Figur angebracht. Die Divergenz zwischen den verschiedenen Kurven, wie sie in der Fig. 16 auftritt, läßt sich nicht auf eine Zufälligkeit zu-

rückführen, denn in einer größeren Anzahl solcher Versuche trat sie immer auf. Der Grund dieser Erscheinungen konnte nicht aufgefunden werden (Ozon, Feuchtigkeit?); aus den Versuchen war lediglich der Schluß zu ziehen, daß die Ströme aus einer Spitze in ruhender Luft nicht, dagegen bei hindurchgesaugter Luft vollkommen reproduzierbar sind. Dieser letztere Umstand führte dazu, die Formel (9) für kegelförmige Spitze auch bei strömender Luft zu prüfen. Die Versuchsanordnung blieb dieselbe. Die Resultate der Messungen sind in der Tab. XII und Fig. 17 wiedergegeben.

Tabelle XII.

Druck im Entl.-Gefäß auf 0° red. 713,9 mm Hg. Zimmer-Temp. 16° C.  
 $M = 2500 V$ .

Prüfung der Warburgschen Formel.

+ V	$i \cdot 10^7$	$a \cdot 10^{12}$	$a_m \cdot 10^{12}$	$i' \cdot 10^7$
3000	6,76	4,51	4,88	7,2
3500	15,8	4,51		16,9
4000	28,4	4,73		29,0
4500	43,7	4,86		43,6
5000	61,2	4,90		60,5
5500	83,6	5,07		79,7
6000	109,9	5,23		101,5

Prüfung der Formel  $i = C(V - M)(V + b)^2$ .

+ V	b	$b_m$	$\sqrt{c} \cdot 10^3$	$\sqrt{c_m} \cdot 10^3$
3000	2760	2856	6,38	6,39
6000				
3500	2550		6,60	
5500				$c_m =$
4000	3320		5,94	$4,08 \cdot 10^{-17}$
5000				
3000	2580		6,65	
4500				
3500	2640		6,47	
5000				
4000	3130		6,50	
5500				
4500	3080		6,17	
6000				

+ V	$i \cdot 10^7$	$A \cdot 10^4$	$i'' \cdot 10^7$
3000	6,76	0,030	7,0
3500	15,8	0,038	16,5
4000	28,4	0,032	28,8
4500	43,7	0,027	44,2
5000	61,2	0,033	63,0
5500	83,6	0,033	85,5
6000	109,9		112,0

Aus der Tabelle ersieht man, daß die Konstante  $a$  der Warburgschen Formel für strömende Luft einen systematisch wachsenden Gang zeigt, und daß die nach Formel (9) be-

rechneten Ströme sich viel besser den experimentellen Werten anpassen, als diejenigen, die nach der Warburgschen Formel berechnet sind.

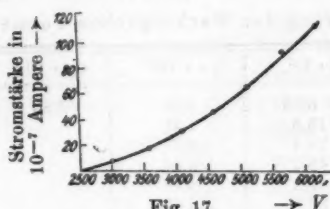


Fig. 17.

§ 12. Die Resultate der beschriebenen Versuche können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Die Charakteristik der Spitzenentladung ist von der mikroskopischen Gestalt der Spitze abhängig.
2. Die Charakteristik der positiven Spitzenentladung für Spitzen mit gut ausgeprägtem kegelförmigen Ende läßt sich analytisch durch die Formel darstellen:

$$i = C(V - M)(V + b)^2,$$

wo  $C$ ,  $M$ ,  $b$  für eine bestimmte Spitze, einen bestimmten Druck und ein bestimmtes Gas konstante Größen sind.

3. Die Erzeugende des die Spitze umhüllenden Lichtkegels wächst linear mit der Spannung.

4. Bei Bedingungen, bei welchen der die Spitze umhüllende Lichtkegel sich nicht ausdehnen kann, hängt die Stromstärke linear von der Spannung ab.

5. Die Spitzenstromstärken, die in geschlossenen Gefäßen und in ruhender Luft gemessen werden, sind nicht ohne weiteres reproduzierbar.

6. Wird dagegen die Luft durch das Entladungsgefäß hindurchgesaugt, so sind die Spitzenströme reproduzierbar und befolgen das unter 2. angegebene Gesetz.

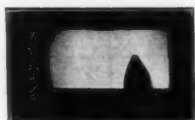
Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Zürich unter Leitung von Herrn Professor Dr. Edgar Meyer ausgeführt. Ihm sowie Herrn Professor Dr. Greinacher schulde ich für die vielfache Unterstützung großen Dank.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 8. Januar 1923)

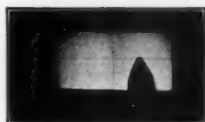
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.





Spitze vor Entladung

Fig. 1.



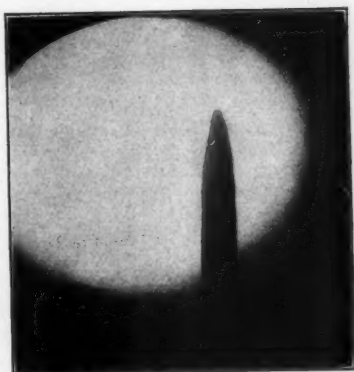
Spitze nach einer einstündigen  
+ Entladung von 4000 Volt

Fig. 2.



Spitze vor Entladung

Fig. 3.



Spitze nach einer einstündigen Ent-  
ladung von - 4000 Volt

Fig. 4.